La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**
4. Le sujet comporte 4 pages et 4 exercices. Bon courage !

Exercice 1 : Questions de cours

— Donner la loi, l'espérance et la variance pour chacune des lois classiques suivantes : Bernoulli, binomiale, uniforme. Donner la preuve de l'espérance pour la loi binomiale. Donner la preuve de la variance pour la loi uniforme.

— Donner la définition d'une base d'un espace vectoriel.

— Donner la définition d'une racine d'un polynôme. Rappeler la propriété équivalente à être une racine d'un polynôme. Combien de racines admet (au plus) un polynôme non nul ?

Voir cours

Exercice 2 : Des exercices proches du cours ou du DS précédent

1. Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les systèmes ci-dessous :

$$S_1 : \begin{cases} x - z &= m \\ -2x + 3y + 4z &= 1 \\ y + z &= 2m \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$

2. a) Inverser la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 et A^3. En déduire, pour tout $n \geq 3$, A^n.

Calculer, pour tout $n \geq 3$, B^n.

3. a) Trouver les polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2P(x^2 + 1) = (x^3 + 2x^2 + 2x + 4)P'(x)$$

b) Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}_3[x]$ tels que :

$$P(0) = 0;\ P(1) = 0;\ P(-1) = 1;\ P'(1) = 0.$$

On pourra donner la réponse sous forme factorisée.

c) Donner la factorisation des polynômes suivants :

i. $P = x^4 + x^3 - 2x^2 - 8x$, ii. $Q = x^4 - x^2 - 6$, iii. $R = x^5 + 2x^3 + 9x$.

d) Trouver les réels a et b tel que $(X+2)^2$ divise $aX^4 + bX^3 + 1$, et factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme obtenu.

4. a) Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 2z = 0\}$.
Montrez que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et préciser une base et la dimension de E.

b) Soient $u = (1, 2, 1)$, $v = (2, 0, 3)$ et $w = (0, 1, 1)$.

i. Montrez que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

ii. Donnez les coordonnées du vecteur $t = (-1, 10, 1)$ dans cette base.

Semblable aux TDs, voir ce qu'on a fait en cours.

Exercice 3 : Commutant d'une matrice

Je vous ai remis l'exercice entier ici. Une partie des notions seront plus claires après le prochain chapitre

Partie 1 : questions préliminaires

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On pose :

$$\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$$

appelé *le commutant de la matrice* A, et

$$\mathbb{R}[A] = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}[x]\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathbb{R}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et que $\mathbb{R}[A] \subset \mathscr{C}(A)$.
3. Déterminer $\mathscr{C}(I_n)$ et $\mathbb{R}[I_n]$.

Partie 2 : cas d'une matrice diagonale à coefficients diagonaux 2 à 2 distincts

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels strictement positifs et deux à deux distincts. Considérons :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

4. **Étude de $\mathscr{C}(D)$.**
   a) Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $M \times D$ et $D \times M$.
   b) En déduire que M appartient à $\mathscr{C}(D)$ si, et seulement si, M est une matrice diagonale.
5. **Étude de $\mathbb{R}[D]$.**
   a) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$:

$$P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

   b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur P pour qu'il soit un polynôme annulateur de D.
   c) Montrer que si P est un polynôme annulateur non nul de D, alors $\deg(P) \geq n$.

d) Montrer que $(I_n, D, \dots, D^{n-1})$ est une famille libre de $\mathbb{R}[D]$.
On admet pour la suite que cela prouve $\mathbb{R}[D] = \mathscr{C}(D)$.

6. **Étude de** $\mathscr{R} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M^2 = D\}$**.**

a) Soit $M \in \mathscr{R}$. Montrer que M appartient à $\mathscr{C}(D)$. En déduire qu'il existe $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$M = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

b) Montrer que $\mathscr{R}$ est de cardinal 2^n, et déterminer les 2^n matrices M vérifiant $M^2 = D$.

Partie 3 : cas des matrices de taille 2×2

7. Déterminer $\max\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$.

8. On cherche à déterminer $\min\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$.

a) Montrer que $\min\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) \leq 2$.

b) Supposons qu'il existe $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\dim(\mathscr{C}(A)) \leq 1$.

i. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$.

ii. Aboutir à une contradiction et conclure.

Partie 1 : questions préliminaires

1. Montrons que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - La matrice nulle $M = 0_n$ appartient bien à $\mathscr{C}(A)$ puisque $M \times A = 0_n = A \times M$.
   - Soient $M, N \in \mathscr{C}(A)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda M + \mu N$ appartient à $\mathscr{C}(A)$:

$$\begin{aligned} A \times (\lambda M + \mu N) &= \lambda A \times M + \mu A \times N \\ &= \lambda M \times A + \mu N \times A \quad \text{car } M, N \in \mathscr{C}(A) \\ &= (\lambda M + \mu N) \times A. \end{aligned}$$

   Ainsi $\lambda M + \mu N$ appartient bien à $\mathscr{C}(A)$.

$\boxed{\mathscr{C}(A) \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

2. Montrons que $\mathbb{R}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Pour $P = 0_{\mathbb{R}[x]}$, $P(A) = 0_n$, de sorte que la matrice nulle appartient bien à $\mathbb{R}[A]$.
   - Soient $M, N \in \mathbb{R}[A]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda M + \mu N$ appartient à $\mathbb{R}[A]$.

     Puisque $M, N \in \mathbb{R}[A]$, il existe $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ tels que $M = P(A)$ et $N = Q(A)$. Dès lors :

$$\lambda M + \mu N = \lambda P(A) + \mu Q(A) = (\lambda P + \mu Q)(A) = R(A)$$

     où $R = \lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}[x]$. Ainsi, $\lambda M + \mu N$ appartient bien à $\mathbb{R}[A]$.

$\boxed{\mathbb{R}[A] \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

Montrons à présent que $\mathbb{R}[A] \subset \mathscr{C}(A)$. Soit pour cela $M \in \mathbb{R}[A]$. Par définition, il existe $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $M = P(A)$. Or, on sait par le cours qu'un polynôme en A commute avec A. Donc M appartient bien à $\mathscr{C}(A)$. D'où l'inclusion $\boxed{\mathbb{R}[A] \subset \mathscr{C}(A).}$

Remarque. Démontrons ce point de cours à la main (si des fois il n'était pas connu le jour

du DS). Notons pour cela $P = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Alors :

$$\begin{aligned} A \times M = A \times P(A) &= A \times \Big(a_k A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n\Big) \\ &= a_k A^{k+1} + a_{k-1}A^k + \cdots + a_1 A^2 + a_0 A \\ &= \Big(a_k A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n\Big) \times A \\ &= P(A) \times A = M \times A. \end{aligned}$$

On a ainsi vérifié « à la main » que M appartient à $\mathscr{C}(A)$.

3. Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$I_n \times M = M = M \times I_n.$$

Ainsi M appartient à $\mathscr{C}(I_n)$. D'où l'inclusion $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}(I_n)$ et donc l'égalité $\boxed{\mathscr{C}(I_n) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$. En particulier, $\boxed{\mathscr{C}(I_n) \text{ est de dimension } n^2.}$

Soit $M \in \mathbb{R}[I_n]$. Par définition, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$, qu'on écrit $P = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, tel que :

$$M = P(I_n) = a_k I_n^k + a_{k-1} I_n^{k-1} + \cdots + a_1 I_n + a_0 I_n = (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0) I_n.$$

On remarque que M appartient à $\mathrm{Vect}(I_n)$. Ainsi $\mathbb{R}[I_n] \subset \mathrm{Vect}(I_n)$.

Réciproquement, $I_n = P(I_n)$ pour $P = x$, et appartient donc à $\mathbb{R}[I_n]$. Puisque $\mathbb{R}[I_n]$ est un sous-espace vectoriel, on en déduit l'inclusion $\mathrm{Vect}(I_n) \subset \mathbb{R}[I_n]$.

Ainsi, $\boxed{\mathbb{R}[I_n] = \mathrm{Vect}(I_n)}$. Or (I_n) est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(I_n)$, et libre car constituée d'un vecteur non nul. C'est donc une base de cet espace. On en déduit que :

$$\boxed{\dim(\mathbb{R}[I_n]) = \dim(\mathrm{Vect}(I_n)) = 1.}$$

Partie 2 : cas d'une matrice diagonale à coefficients diagonaux 2 à 2 distincts

4. **Étude de $\mathscr{C}(D)$.**

a) Pour $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, calculons :

$$\boxed{M \times D = \begin{pmatrix} m_{1,1}\lambda_1 & m_{1,2}\lambda_2 & \dots & m_{1,n}\lambda_n \\ m_{2,1}\lambda_1 & m_{2,2}\lambda_2 & \ddots & m_{2,n}\lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1}\lambda_1 & m_{n,2}\lambda_2 & \dots & m_{n,n}\lambda_n \end{pmatrix}, \quad D \times M = \begin{pmatrix} m_{1,1}\lambda_1 & m_{1,2}\lambda_1 & \dots & m_{1,n}\lambda_1 \\ m_{2,1}\lambda_2 & m_{2,2}\lambda_2 & \ddots & m_{2,n}\lambda_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1}\lambda_n & m_{n,2}\lambda_n & \dots & m_{n,n}\lambda_n \end{pmatrix}.}$$

b) M appartient à $\mathscr{C}(D)$ si, et seulement si, $M \times D = D \times M$, ce qui équivaut à (avec le calcul effectué à la question précédente) :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\ i \neq j,\ m_{i,j}\lambda_j = m_{i,j}\lambda_i$$

Et comme les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont supposés deux à deux distincts, ceci est encore équivalent à :

$$m_{i,j} = 0 \ \text{ pour tout } \ i \neq j.$$

Ainsi, $\boxed{M \text{ appartient à } \mathscr{C}(D) \text{ si, et seulement si, } M \text{ est une matrice diagonale.}}$

c) Par la question précédente :

$$\mathscr{C}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix},\ \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R} \right\} = \{\mu_1 E_{1,1} + \mu_2 E_{2,2} + \mu_n E_{n,n},\ \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}\}$$
$$= \mathrm{Vect}\left(E_{1,1}, \dots, E_{n,n}\right),$$

où les $E_{i,j}$ désignent les matrices élémentaires qui constituent la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La famille $(E_{1,1}, \dots, E_{n,n})$ est donc génératrice de $\mathscr{C}(D)$, et libre en tant que sous-famille de la famille libre $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. C'est donc une base de $\mathscr{C}(D)$, ce qui permet de conclure que $\boxed{\dim(\mathscr{C}(D)) = n.}$

5. **Étude de $\mathbb{R}[D]$.**

a) Soit $P = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$ un polynôme de $\mathbb{R}[x]$. Calculons :

$$P(D) = a_k D^k + \dots + a_1 D + a_0 I_n$$
$$= a_k \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} + \dots + a_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} + a_0 I_n$$
$$= \begin{pmatrix} a_k\lambda_1^k + \dots + a_1\lambda_1 + a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_k\lambda_2^k + \dots + a_1\lambda_2 + a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_k\lambda_n^k + \dots + a_1\lambda_n + a_0 \end{pmatrix}$$
$$\boxed{= \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.}$$

b) Avec le calcul précédent, on peut écrire :

$$P(D) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix} = 0_n$$
$$\Leftrightarrow P(\lambda_1) = \dots = P(\lambda_n) = 0$$

Ainsi, $\boxed{P \text{ est un polynôme annulateur de } D \text{ si, et seulement si, } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ sont racines de } P.}$

c) Suppsons que P soit un polynôme annulateur non nul de D. D'après la question précédente, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont racines (distinctes) de P. Il existe donc $Q \in \mathbb{R}[x]$, $Q \neq 0_{\mathbb{R}[x]}$ puisque $P \neq 0_{\mathbb{R}[x]}$, tel que :

$$P = (x - \lambda_1) \times \dots \times (x - \lambda_n) \times Q(x).$$

En prenant le degré, on obtient :

$$\boxed{\deg(P) = n + \deg(Q) \geq n.}$$

d) Montrons que $(I_n, D, \dots, D^{n-1})$ est une famille libre de $\mathbb{R}[D]$. Soit pour cela $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ des réels tels que :

$$\alpha_0 I_n + \alpha_1 D + \cdots + \alpha_{n-1} D^{n-1} = 0_n.$$

Montrons que $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

En notant $Q = \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, l'égalité précédente se récrit $Q(D) = 0$. Le polynôme Q est donc annulateur de D et est de degré $\leq n-1$. Par la question précédente, Q est donc le polynôme nul. En particulier, tous ses coefficients sont nuls :

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

$\boxed{\text{La famille } (I_n, D, \dots, D^{n-1}) \text{ est donc libre.}}$

e) $(I_n, D, \dots, D^{n-1})$ est une famille libre de $\mathbb{R}[D]$. Par conséquent, $\mathbb{R}[D]$ est de dimension supérieure ou égale au cardinal de cette famille, c'est-à-dire $\dim(\mathbb{R}[D]) \geq n$.

Or, on a vu à la question 2. que $\mathbb{R}[D] \subset \mathscr{C}(D)$ et à la question 4.(c) que $\dim(\mathscr{C}(D)) = n$. Il suit que $\boxed{\mathbb{R}[D] = \mathscr{C}(D).}$

6. **Étude de $\mathscr{R} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M^2 = D\}$.**

a) Soit $M \in \mathscr{R}$. M satisfait donc $M^2 = D$. Calculons :

$$M \times D = M \times M^2 = M^2 \times M = D \times M.$$

Ainsi, $\boxed{M \text{ appartient à } \mathscr{C}(D).}$

Or, d'après la question 6.(a), le commutant de D est formé des matrice diagonales. Par conséquent, il existe $\mu_1, \dots, \mu_n$ des réels tels que :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.}$$

b) Substituons dans l'équation $M^2 = D$:

$$\begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Par identification, on obtient $\mu_1^2 = \lambda_1, \dots, \mu_n^2 = \lambda_n$, soit $\mu_1 = \pm\sqrt{\lambda_1}, \dots, \mu_n = \pm\sqrt{\lambda_n}$.

Ainsi, si M appartient à $\mathscr{R}$, alors M est l'une des 2^n matrices :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1\sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

où pour tout $1 \leq i \leq n$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Réciproquement, toutes ces matrices sont clairement dans $\mathscr{R}$. Par conséquent :

$$\boxed{\mathscr{R} = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1\sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}, \ \varepsilon_1, \dots \varepsilon_n \in \{-1, 1\} \right\}}$$

et $\boxed{\mathscr{R} \text{ est bien de cardinal } 2^n.}$

Partie 3 : cas des matrices de taille 2×2

7. Pour tout $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension 4, donc $\dim(\mathscr{C}(A)) \leq 4$. Et on a vu à la question 3. que $\dim(\mathscr{C}(I_2)) = 4$. On peut donc conclure que :
$$\max_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) = 4.$$

8. a) Pour $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on sait d'après la question 4.(c) que $\dim(\mathscr{C}(D)) = 2$. Il suit que $\boxed{\min_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) \leq 2.}$

   b) Supposons qu'il existe $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\dim(\mathscr{C}(A)) \leq 1$.

      i. Puisque I_n appartient à $\mathscr{C}(A)$ et que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on obtient l'inclusion $\text{Vect}(I_n) \subset \mathscr{C}(A)$. Mais, on l'a vu, $\text{Vect}(I_n)$ est de dimension 1, alors que $\dim(\mathscr{C}(A)) \leq 1$ par hypothèse. Par conséquent :
      $$\text{Vect}(I_n) = \mathscr{C}(A).$$
      Or, A appartient également à $\mathscr{C}(A) = \text{Vect}(I_n)$. On peut donc conclure qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{A = \lambda I_2.}$

      ii. Toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ commute avec λI_2, de sorte que :
      $$\mathscr{C}(A) = \mathscr{C}(\lambda I_2) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$
      Or ce sous-espace est de dimension 4, et non de dimension ≤ 1. D'où une contradiction.
      Ainsi, pour tout $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\dim(\mathscr{C}(A)) \geq 2$. On en déduit l'inégalité :
      $$\min_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) \geq 2.$$
      Et avec le résultat de la question 8.(a), on peut donc conclure que :
      $$\boxed{\min_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) = 2.}$$

Exercice 4 : Probabilités

Soient p un réel appartenant à l'intervalle $]0; 1[$ et N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $q = 1 - p$. On considère un tournoi réunissant une infinité de joueurs $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ qui s'affrontent dans une série de duels de la façon suivante :

- A_0 et A_1 s'affrontent durant le duel numéro 1. Le perdant est éliminé du tournoi, le gagnant reste en jeu.
- Le gagnant du premier duel participe au duel numéro 2 durant lequel il affronte le joueur A_2. Ce duel se déroule de manière analogue et ne dépend du duel précédent que par l'identité du

joueur affrontant A_2. Le perdant est éliminé du tournoi, et le gagnant du jeu participe au duel numéro 3 contre le joueur A_3 et ainsi de suite.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le joueur A_k participe au duel numéro k, qu'il peut remporter avec une probabilité p, son adversaire durant ce duel pouvant remporter le duel avec la probabilité $q = 1 - p$.
- Est désigné gagnant du tournoi, le premier joueur, s'il y en a un, qui gagne N jeux successifs lors du tournoi.

Pour tout entier naturel n et pour tout $0 \leq k \leq n$, on considère les évènements :

— E_n : "le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n"

— B_k^n : "le joueur A_k a remporté le duel numéro n"

Partie I : Étude d'un cas particulier.

On suppose dans cette partie que $N = 3$ et $p = q = \dfrac{1}{2}$.

1. Donner la liste des gagnants possibles pour chacun des trois premiers duels.
2. Déterminer les probabilités $P(E_1)$ et $P(E_2)$.
3. Exprimer l'évènement $\overline{E_3}$ à l'aide des évènements B_k^n. En déduire que $P(\overline{E_3}) = \dfrac{1}{4}$.
   Vérifier alors que :
   $$P(E_3) = \frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1)$$
4. Soit $n \geq 3$. Pour tout $1 \leq k \leq n$, notons $A_k^{(n)}$ l'évènement «le vainqueur du n-ième duel a gagné k duels à l'issue du n-ième duel».
   a) Montrer que :
   $$P\left(E_n\right) = P\left(A_1^{(n)}\right) P_{A_1^{(n)}}\left(E_n\right) + P\left(A_2^{(n)}\right) P_{A_2^{(n)}}\left(E_n\right)$$
   b) En déduire :
   $$(\mathcal{R}_1) : P\left(E_n\right) = \frac{1}{2}P\left(E_{n-1}\right) + \frac{1}{4}P\left(E_{n-2}\right)$$
5. Justifier l'existence de quatre réels λ, μ, r_1, r_2 tels que :
   $$\forall n \geq 2, \quad P\left(E_n\right) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$
   Le calcul explicite de λ et μ n'est pas demandé. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(E_n\right)$.
6. *Non traitable pour l'instant (définition précise pas encore vue en cours)* Que vaut la probabilité $P\left(\bigcap\limits_{k=2}^{+\infty} E_k\right)$? Quelle est la probabilité de l'événement «le tournoi désignera un vainqueur» ?

Partie II : Étude du cas général

On revient au cas général : p désigne un réel quelconque de $]0;1[$ et N est un entier supérieur ou égal à 3. On considère le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}X^k\right) - 1$$

7. Pour tout $1 \leq k \leq n$, on note toujours $A_k^{(n)}$ l'événement : "à l'issue du n-ième duel, le vainqueur du n-ième duel a obtenu exactement k victoires".
   Montrer que : $\quad P\left(A_k^{(n)}\right) = pq^{k-1}$.
8. Pour tout $k \in \{1, \ldots, N-1\}$, justifier l'égalité :
   $$\forall n \geq N, \quad P_{A_k^{(n)}}\left(E_n\right) = P\left(E_{n-k}\right)$$

9. Établir que pour tout $n \geq N$, on a :

$$(\mathcal{R}_2) : P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k})$$

10. Calculer $P(E_1), \ldots, P(E_{N-1})$. En déduire que :

$$P(E_N) = 1 - q^{N-1}$$

11. Soit $n \geq N$. À l'aide de $(\mathcal{R}_2)$, démontrer la relation :

$$(\mathcal{R}_3) : P(E_n) - P(E_{n+1}) = pq^{N-1} P(E_{n-N+1})$$

12. Prouver que l'équation $Q(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
On note désormais r_N cette solution. Justifier que :

$$r_N > 1 \quad \text{et} \quad Q'(r_N) > 0$$

13. À l'aide de la relation $(\mathcal{R}_2)$, établir que :

$$\forall n \geq 1, \quad P(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$$

La fin du sujet n'est pas faisable pour l'instant, mais le sera d'ici un mois. Je vous la mets tout de même, pour que vous puissiez vous y frotter quand nous aurons fait le cours sur les séries et sur les variables discrètes infinies.

14. Établir la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} P(E_n)$ puis, en sommant la relation $(\mathcal{R}_3)$ sur tous les entiers $n \geq N$, donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$.

15. On définit X la variable aléatoire égale au nombre de duels qui ont eu lieu au moment de la proclamation du vainqueur du tournoi. On conviendra que $X = 0$ si le tournoi n'a pas de vainqueur.
    a) Soit $n \geq 2$. Justifier que les événements $\left(E_{n-1} \cap \overline{E_n}\right)$ et $[X = n]$ sont égaux, puis que :

$$P(X = n) = P(E_{n-1}) - P(E_n)$$

    b) Démontrer que X admet une espérance et exprimer $E(X)$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$. En déduire la valeur de $E(X)$.

1. La liste des gagnants possibles pour chacun des trois premiers duels est :

$$\boxed{\begin{array}{c}(A_0, A_0, A_0), (A_0, A_0, A_3), (A_0, A_2, A_2), (A_0, A_2, A_3), \\ (A_1, A_1, A_1), (A_1, A_1, A_3), (A_1, A_2, A_2), (A_1, A_2, A_3)\end{array}}$$

2. Il est évident qu'il ne peut y avoir de gagnant du tournoi à l'issue du premier duel ni à l'issue du second duel, car alors aucun joueur n'a gagné trois duels de suite. Donc on a $\boxed{P(E_1) = P(E_2) = 1.}$

3. L'évènement $\overline{E_3}$ se réalise si et seulement si un gagnant a été désigné à l'issue du troisième duel. Or ceci est possible si et seulement si le gagnant du premier duel (A_1 ou A_2) a également remporté les deux suivants. Ainsi, on a :

$$\boxed{\overline{E_3} = (B_0^1 \cap B_0^2 \cap B_0^3) \cup (B_1^1 \cap B_1^2 \cap B_1^3).}$$

On en déduit, par incompatibilité des évènements $(B_0^1 \cap B_0^2 \cap B_0^3)$ et $(B_1^1 \cap B_1^2 \cap B_1^3)$:

$$P(\overline{E_3}) = P(B_0^1 \cap B_0^2 \cap B_0^3) + P(B_1^1 \cap B_1^2 \cap B_1^3).$$

Les évènements B_i^j n'étant pas indépendants, on applique la formule des probabilités composées :

$$P(B_0^1 \cap B_0^2 \cap B_0^3) = P(B_0^1)P_{B_0^1}(B_0^2)P_{B_0^1 \cap B_0^2}(B_0^3) = \frac{1}{2^3}.$$

De même, on a $P(B_1^1 \cap B_1^2 \cap B_1^3) = \frac{1}{8}$, et donc : $\boxed{P(\overline{E_3}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.}$ Et on vérifie que : $\boxed{P(E_3) = 1 - P(\overline{E_3}) = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1).}$

4. a) Les évènements $A_k^{(n)}$ pour $1 \leq k \leq n$ forment un système complet d'évènements. Par la formule des probabilités totales, on a donc :

$$P(E_n) = P(E_n \cap A_1^{(n)}) + P(E_n \cap A_2^{(n)}) + P(E_n \cap A_3^{(n)}) + \cdots + P(E_n \cap A_n^{(n)})$$

Or pour tout $3 \leq k \leq n$, l'évènement $E_n \cap A_k^{(n)}$ est impossible : puisqu'il n'y a pas de vainqueur à l'issue du n-ème duel, celui qui a gagné ce duel ne peut en avoir déjà gagné plus de deux. Ainsi, on a :

$$\boxed{P(E_n) = P(E_n \cap A_1^{(n)}) + P(E_n \cap A_2^{(n)}) = P(A_1^{(n)})P_{A_1^{(n)}}(E_n) + P(A_2^{(n)})P_{A_2^{(n)}}(E_n).}$$

b) On a $A_1^{(n)} = B_n^n$ et $A_2^{(n)} = B_{n-1}^{n-1} \cap B_{n-1}^n$, de sorte que :

$$P(A_1^{(n)}) = P(B_n^n) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(A_2^{(n)}) = P(B_{n-1}^{n-1} \cap B_{n-1}^n) = P(B_{n-1}^{n-1})P_{B_{n-1}^{n-1}}(B_{n-1}^n) = \frac{1}{2^2}.$$

D'autre part, en sachant que A_n a gagné le n-ème duel, il n'y a pas de gagnant au bout de n duels si et seulement si il n'y en avait pas au bout de $n-1$. Et donc $P_{A_1^{(n)}}(E_n) = P_{A_1^{(n)}}(E_{n-1})$.

Mais E_{n-1} (qui ne dépend que des $n-1$ premiers duels) est indépendant de $A_1^{(n)}$ (qui dépend seulement du dernier), on a : $P_{A_1^{(n)}}(E_{n-1}) = P(E_{n-1})$.

Par le même raisonnement, on a $P_{A_2^{(n)}}(E_n) = P(E_{n-2})$.

On obtient donc en substituant dans le résultat de la question précédente :

$$\boxed{P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}).}$$

5. La relation précédemment obtenue montre que la suite $(P(E_n))_{n\geq 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, de polynôme caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

Le discriminant de ce polynôme est $\frac{1}{4} + 1 > 0$, donc le polynôme caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$. On en déduit l'existence de deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \geq 2, \qquad P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Comme $2 < \sqrt{5} < 3$, r_1 et r_2 sont tous deux dans $]-1, 1[$, et donc : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = 0.}$

6. On a (propriété de la limite monotone) :

$$P\left(\bigcap_{k=2}^{+\infty} E_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=2}^{n} E_k\right).$$

Or, on a $\bigcap_{k=2}^{n} E_k = E_n$ (car $E_n \subset E_k$ pour tout $2 \leq k \leq n$), d'où :

$$\boxed{P\left(\bigcap_{k=2}^{+\infty} E_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(E_n) = 0}$$

par la question précédente. Or $\bigcap_{k=2}^{+\infty} E_k$ est l'évènement « le tournoi ne désigne pas de vainqueur ». Et donc, par passage à l'événement contraire, le tournoi désigne un vainqueur avec probabilité 1.

Partie II : Étude du cas général.

7. L'évènement $A_k^{(n)}$ est réalisé si et seulement si le joueur A_{n-k+1} a gagné tous les duels $n-k+1$ à n inclus (ce qui fait $n-(n-k+1)+1 = k$ victoires). On a donc :

$$A_k^{(n)} = B_{n-k+1}^{n-k+1} \cap B_{n-k+1}^{n-k+2} \cap \cdots \cap B_{n-k+1}^{n}.$$

Par la formule des probabilités composées, on a :

$$P(A_k^{(n)}) = P(B_{n-k+1}^{n-k+1}) P_{B_{n-k+1}^{n-k+1}}(B_{n-k+1}^{n-k+2}) \dots P_{B_{n-k+1}^{n-k+1}\cap\cdots\cap B_{n-k+1}^{n-1}}(B_{n-k+1}^{n}).$$

Et on a $P(B_{n-k+1}^{n-k+1}) = p$ car le joueur A_{n-k+1} est rentré en jeu lors du $(n-k+1)$-ème duel, et toutes les autres probabilités conditionnelles valent q. Ainsi, on a bien :

$$\boxed{P(A_k^{(n)}) = pq^{k-1}.}$$

8. Soit $k \in \{1, \dots, N-1\}$ et $n \geq N$. Sachant que le joueur qui a remporté le n-ème duel a remporté les k derniers duels, avec $k < N$, il n'y a pu y avoir de gagnant du tournoi lors des duels $n-k+1, n-k+2, \dots, n$.
Et donc E_n est réalisé si et seulement si il n'y avait pas non plus de gagnant du tournoi lors des $n-k$ premiers duels. Ainsi, on a : $P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P_{A_k^{(n)}}(E_{n-k})$.
Or, les événements $A_k^{(n)}$ et E_{n-k} sont indépendants car E_{n-k} ne dépend que des résultats des $(n-k)$ premiers duels, alors que $A_k^{(n)}$ ne dépend que des résultats des duels $n-k+1, \dots, n$. Ainsi, on a :

$$\boxed{P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P_{A_k^{(n)}}(E_{n-k}) = P(E_{n-k}).}$$

9. Soit $n \geq N$. Par la formule des probabilités totales appliquée avec le SCE $(A_k^{(n)})_{1\leq k\leq n}$, on a :

$$P(E_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k^{(n)}) P_{A_k^{(n)}}(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} P(A_k^{(n)}) P_{A_k^{(n)}}(E_n)$$

car $P_{A_k^{(n)}}(E_n)$ pour tout $k \geq N$ (si un joueur a gagné $k \geq N$ duels, le tournoi a désigné un vainqueur). À l'aide des résultats obtenus aux deux questions précédentes, on en déduit que :

$$\boxed{P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k}).}$$

10. Il ne peut y avoir de vainqueur du tournoi en strictement moins de N duels, donc :

$$\boxed{P(E_1) = P(E_2) = \cdots = P(E_{N-1}) = 1.}$$

À l'aide de la relation $(\mathcal{R}_2)$ avec $n = N$, on a $(q \neq 1)$:

$$P(E_N) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{N-k}) = p\sum_{k=1}^{N-1} q^{k-1} = p \times \underbrace{1}_{\text{premier terme}} \times \frac{1-q^{N-1}}{1-q} \boxed{= 1-q^{N-1}.}$$

11. Soit $n \geq N$. On a avec la relation $(\mathcal{R}_2)$:

$$\begin{aligned}
P(E_n) - P(E_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n+1-k}) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - \sum_{i=0}^{N-2} pq^{i}P(E_{n-i}) \\
&= \sum_{k=1}^{N-2} pq^{k-1}P(E_{n-k}) + pq^{N-2}P(E_{n-N+1}) - \sum_{i=1}^{N-2} pq^{i}P(E_{n-i}) - pP(E_n) \\
&= \sum_{k=1}^{N-2} pq^{k-1}(1-q)P(E_{n-k}) + pq^{N-2}P(E_{n-N+1}) - pP(E_n) \\
&= p\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - p^2q^{N-2}P(E_{n-N+1}) + pq^{N-2}P(E_{n-N+1}) - pP(E_n) \\
&= pP(E_n) + pq^{N-2}(1-p)P(E_{n-N+1}) - pP(E_n) \boxed{= pq^{N-1}P(E_{n-N+1})}
\end{aligned}$$

12. Le polynôme Q est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, et donc en particulier dérivable sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \geq 0$, on a :

$$Q'(x) = \sum_{k=1}^{N-1} kpq^{k-1}x^{k-1} = p + \sum_{k=2}^{N-1} kpq^{k-1}x^{k-1} > 0.$$

Le polynôme Q est donc continu et strictement croissant sur $[0, +\infty$. De plus, on a $Q(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x) = +\infty$.

D'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{l'équation } Q(x) = 0 \text{ possède une unique solution sur } [0, +\infty[}$, qu'on note r_N.

On a déjà montré que $\boxed{Q'(r_N) > 0}$. De plus, on a :

$$Q(1) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} - 1 = p\sum_{k'=0}^{N-2} q^{k'} - 1 = p\frac{1-q^{N-1}}{1-q} - 1 = -q^{N-1}.$$

Donc on a $Q(1) < 0 = Q(r_N)$. Le polynôme Q étant strictement croissant sur $[0, +\infty[$, on a $\boxed{r_N > 1}$.

13. Montrons par une récurrence forte [a] que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $P(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$ » est vraie pour tout $n \geq 1$.

Init. Pour tout $1 \leq n \leq N-1$, on a $P(E_n) = 1$. De plus, on a $n - N < 0$ donc $\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N} = (r_N)^{N-n} \geq 1$ On a donc bien $P(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$, de sorte que $\mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(N-1)$ sont vraies.

Hér. Soit $n \geq N$. On suppose $\mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(n-1)$ vraies. Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. D'après la relation $(\mathcal{R}_2)$, on a :

$$P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k})$$

Or par hypothèse de récurrence, pour tout $1 \leq k \leq N-1$, $P(E_{n-k}) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-k-N}$, d'où :

$$P(E_n) \leq \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-k-N} \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N} \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} r_N^k$$

Or, on a $\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} r_n^k = Q(r_N) + 1 = 1$ car r_N est racine de Q. Ainsi, on a $P(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$ et la propriété est vraie au rang n.

Par principe de récurrence (forte), on a donc que : $\boxed{\forall n \geq 1, \quad P(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}.}$

14. On procède par théorème de comparaison.

— Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq P(E_N) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$.

— La série $\sum \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{r_N} \in]-1, 1[$).

Par théorème de comparaison, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} P(E_n) \text{ converge.}}$

Soit $N' > N$. En sommant la relation $(\mathcal{R}_3)$ pour $N \leq n \leq N'$, on obtient :

$$\sum_{n=N}^{N'} P(E_n) - P(E_{n+1}) = \sum_{n=N}^{N'} pq^{N-1} P(E_{n-N+1}).$$

D'où, comme la somme de gauche est une somme téléscopique :

$$P(E_N) - P(E_{N'+1}) = pq^{N-1} \sum_{k=1}^{N'-N+1} P(E_k)$$

en faisant le changement d'indice $k = n - N + 1$ dans la somme de droite. On fait tendre N' vers $+\infty$ dans cette relation où toutes les expressions convergent :

$$P(E_N) = pq^{N-1} \sum_{k=1}^{+\infty} P(E_k).$$

Comme $P(E_N) = 1 - q^{N-1}$, on en déduit que : $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} P(E_k) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{q^{N-1}} - 1\right).}$

15. a) Soit $n \geq 2$. L'événement $E_{n-1} \cap \overline{E_n}$ est réalisé si le gagnant n'est pas désigné à l'issue du $(n-1)$-ième duel mais l'est à l'issue du n-ième. Cela correspond donc à ce qu'exactement n duels ont eu lieu au moment de la proclamation du vainqueur du tournoi. Ainsi, on a bien $\boxed{[X = n] = E_{n-1} \cap \overline{E_n}}$.

D'autre part, on a par la formule des probabilités totales :

$$P(E_{n-1}) = P(E_{n-1} \cap E_n) + P(E_{n-1} \cap \overline{E_n}) = P(E_n) + P(X = n)$$

car $E_n \subset E_{n-1}$. D'où le résultat voulu :

$$\boxed{P(X = n) = P(E_{n-1}) - P(E_n).}$$

b) X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} \underbrace{nP(X=n)}_{\geq 0}$ converge (absolument).

On effectue un théorème de comparaison :

— Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$0 \leq nP(X = n) = nP(E_{n-1} \cap \overline{E_n}) \subset nP(E_{n-1}) \leq n\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-1-N}$$

par la question 13.

— La série de terme général $n\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-1-N}$ converge (série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{r_N} \in]-1, 1[$).

Par théorème de comparaison, la série $\sum_{n\geq 0} nP(X = n)$ converge, et

$\boxed{X \text{ admet une espérance.}}$

Calculons $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n) = \underbrace{P(X=1)}_{=0 \text{ car } N\geq 3} + \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(P(E_{n-1}) - P(E_n)\right) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} nP(E_{n-1}) - \sum_{n=2}^{+\infty} nP(E_n) \underbrace{=}_{\text{Tout converge}} \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)P(E_n) - \sum_{n=2}^{+\infty} nP(E_n) \\ &\underbrace{=}_{\text{Tout converge}} \sum_{n=1}^{+\infty} nP(E_n) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) - \sum_{n=2}^{+\infty} nP(E_n) = P(E_1) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) \end{aligned}$$

Or $P(E_1) = 1$ (question 10), et on avait obtenu la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$ à la question 14. D'où en substituant :

$$\boxed{E(X) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) = 1 + \frac{1}{p}\left(\frac{1}{q^{N-1}} - 1\right).}$$

a. Cela signifie qu'à l'hérédité, on ne suppose pas seulement l'hypothèse vérifiée au rang $n-1$ pour prouver qu'elle l'est au rang n, mais on suppose plutôt qu'elle est vérifiée à tous les rangs $0, 1, \ldots, n-1$ pour prouver qu'elle est vraie au rang n.

****Bon courage à toutes et tous !****