La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**
4. Le sujet comporte 4 pages et 6 exercices. Bon courage !

Exercice 1 : Questions de cours

— Donner la loi, l'espérance et la variance pour chacune des lois classiques suivantes : Bernoulli, binomiale, uniforme. Donner la preuve de l'espérance pour la loi binomiale. Donner la preuve de la variance pour la loi uniforme.

— Donner la définition d'une base d'un espace vectoriel.

— Donner la définition d'une racine d'un polynôme. Rappeler la propriété équivalente à être une racine d'un polynôme. Combien de racines admet (au plus) un polynôme non nul ?

Exercice 2 : Des exercices proches du cours ou du DS précédent

1. Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les systèmes ci-dessous :

$$S_1 : \begin{cases} x - z &= m \\ -2x + 3y + 4z &= 1 \\ y + z &= 2m \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$

2. a) Inverser la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 et A^3. En déduire, pour tout $n \geq 3$, A^n.

Calculer, pour tout $n \geq 3$, B^n.

3. a) Trouver les polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2P(x^2 + 1) = (x^3 + 2x^2 + 2x + 4)P'(x)$$

b) Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}_3[x]$ tels que :

$$P(0) = 0;\ P(1) = 0;\ P(-1) = 1;\ P'(1) = 0.$$

On pourra donner la réponse sous forme factorisée.

c) Donner la factorisation des polynômes suivants :

i. $P = x^4+x^3-2x^2-8x$, ii. $Q = x^4 - x^2 - 6$, iii. $R = x^5 + 2x^3 + 9x$.

d) Trouver les réels a et b tel que $(X + 2)^2$ divise $aX^4 + bX^3 + 1$, et factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme obtenu.

4. a) Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 2z = 0\}$.
Montrez que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et préciser une base et la dimension de E.

b) Soient $u = (1, 2, 1)$, $v = (2, 0, 3)$ et $w = (0, 1, 1)$.

i. Montrez que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

ii. Donnez les coordonnées du vecteur $t = (-1, 10, 1)$ dans cette base.

Exercice 3 : Espaces vectoriels

On considère la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $AX = X$ est un espace vectoriel que l'on notera E_1. Déterminer une famille génératrice puis une base de E_1.
2. Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On admet que l'ensemble des solutions de l'équation $AX = 2X$ est un espace vectoriel noté E_2. Déterminer une famille génératrice puis une base de E_2.
3. On écrit $E_1 = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $E_2 = \text{Vect}(u_3)$ et on considère $P = (u_1, u_2, u_3)$ une matrice carrée de taille 3 (ses colonnes sont donc les matrices coordonnées de u_1, u_2 et u_3).
   a) Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
   b) Déterminer D définie par $D = P^{-1}AP$.
   c) Montrer que pour tout entier naturel n on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
   d) En déduire A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 4 : Matrices et polynômes

On se propose de déterminer explicitement le terme général de la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et la relation, valable pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$.

Pour ce faire, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. a) Écrire la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, indépendante de n, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n.$$

b) Vérifier que $(A - I)^2(A - 2I) = 0$.

2. On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = (X - 1)^2(X - 2)$.
   a) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence et 1'unicité d'un couple (Q_n, R_n) de $\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}_2[x]$, tel que :
$$x^n = PQ_n + R_n.$$
   b) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$R_n(x) = a_n + b_n(x - 1) + c_n(x - 1)^2.$$

c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1,\ b_n = n$ et $c_n = 2^n - n - 1$.

3. Utiliser la question précédente pour écrire, pour tout n de $\mathbb{N}$, A^n comme combinaison linéaire de I, $A - I$ et $(A - I)^2$.
4. Pour tout n de $\mathbb{N}$, donner la troisième ligne de la matrice A^n.
5. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

Exercice 5 : Polynômes d'interpolation de Lagrange - Reprise DM

Soit $n \in \mathbb{N}$, soient n nombres réels tous distincts $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et soient $y_1, y_2, \ldots y_n$, n nombres réels (pas forcément distincts).

L'objectif est de trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$ tel que

$$P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, \ldots P(x_n) = y_n$$

Un tel problème est appelé "problème d'interpolation".

Autrement dit : on cherche un polynôme qui "passe" par les "points" de coordonnée (x_i, y_i). Vous réutiliserez en deuxième année ces polynômes dans le cas particulier où $y_1 = 1$ et $y_2 = y_3 = ... = 0$, mais on va présenter ici une méthode "universelle", attribuée à Lagrange (1736-1813).

Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on considère le polynôme L_j suivant :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \neq j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

1. **Cas particulier :** on suppose $n = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$.
   a) Écrire les polynômes L_1, L_2 et L_3 sans utiliser le symbole $\prod$ et calculer $L_i(x_j)$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$.
   b) Soient y_1, y_2 et y_3 trois réels et soit $P = y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3$.
      i. Justifier (sans le calculer explicitement) que P est de degré au plus 2.
      ii. Montrer que $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{1; 2; 3\}$.
2. **Cas général :** on suppose n quelconque, x_1, x_2,...,x_n quelconques (mais distincts)
   a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer le degré de L_i.
   b) Quels sont les racines de L_i ?
   c) Calculer $L_i(x_j)$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
   d) Soit $P = \sum_{j=1}^{n} y_j L_j$
      i. Justifier que $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$
      ii. Montrer que ce polynôme P répond au problème d'interpolation.
   e) Soit Q un autre polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ qui répond au problème d'interpolation. Étudier les racines du polynôme $P - Q$ et en déduire que $P = Q$.
3. En utilisant les polynômes d'interpolation, déterminer l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant $P(-1) = 1$, $P(-2) = 3$, $P(1) = 9$ et $P(2) = 3$.

Exercice 6 : Déplacement d'un pion sur un triangle

On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

— le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ;

— pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n" et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n". On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = P(A_n),\ b_n = P(B_n),\ c_n = P(C_n) \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les nombres a_n, b_n et c_n pour $n = 0, 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1}.
3. Donner une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = MV_n$.
4. Trouver une matrice J telle que $M = \dfrac{1}{4}(I_3 + J)$.
5. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, J^n.
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}.$$

   Indication : on pourra tenter d'écrire 4^n en utilisant une formule bien connue.
7. En déduire une expression de a_n, b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. Déterminer les limites respectives des suites (a_n), (b_n) et (c_n). Interpréter le résultat.

****Bon courage à toutes et tous !****