La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**
4. Le sujet comporte 4 pages et 6 exercices. Bon courage !

Exercice 1 : Questions de cours

— Donner la loi, l'espérance et la variance pour chacune des lois classiques suivantes : Bernoulli, binomiale, uniforme. Donner la preuve de l'espérance pour la loi binomiale. Donner la preuve de la variance pour la loi uniforme.
— Donner la définition d'une base d'un espace vectoriel.
— Donner la définition d'une racine d'un polynôme. Rappeler la propriété équivalente à être une racine d'un polynôme. Combien de racines admet (au plus) un polynôme non nul ?

Voir cours

Exercice 2 : Des exercices proches du cours ou du DS précédent

1. Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les systèmes ci-dessous :

$$S_1 : \begin{cases} x - z &= m \\ -2x + 3y + 4z &= 1 \\ y + z &= 2m \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$

2. a) Inverser la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.
Calculer A^2 et A^3. En déduire, pour tout $n \geq 3$, A^n.
Calculer, pour tout $n \geq 3$, B^n.

3. a) Trouver les polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2P(x^2 + 1) = (x^3 + 2x^2 + 2x + 4)P'(x)$$

b) Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}_3[x]$ tels que :

$$P(0) = 0;\ P(1) = 0;\ P(-1) = 1;\ P'(1) = 0.$$

On pourra donner la réponse sous forme factorisée.

c) Donner la factorisation des polynômes suivants :

i. $P = x^4+x^3-2x^2-8x$, ii. $Q = x^4 - x^2 - 6$, iii. $R = x^5 + 2x^3 + 9x$.

d) Trouver les réels a et b tel que $(X + 2)^2$ divise $aX^4 + bX^3 + 1$, et factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme obtenu.

4. a) Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 2z = 0\}$.
Montrez que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et préciser une base et la dimension de E.

b) Soient $u = (1, 2, 1)$, $v = (2, 0, 3)$ et $w = (0, 1, 1)$.

i. Montrez que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

ii. Donnez les coordonnées du vecteur $t = (-1, 10, 1)$ dans cette base.

Semblable à des exercices faits en classe et dans le DS précédent.

— $2P(x^2 + 1) = 6x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \cdot P'(x)$

— On a déjà $2 \deg P = 3 + \deg P - 1$

— Deux solutions : $\deg P = -\infty$ ou $\deg P = 2$

— On vérifie d'abord que $P = 0$ fonctionne. Si $P \neq 0$, on a donc :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad P(x) = ax^2 + bx + c$$

— Mais alors $2P(x^2 + 1) = 2ax^4 + (4a + 2b)x^2 + 2(ax + b + c)$

Exercice 3 : Espaces vectoriels

On considère la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $AX = X$ est un espace vectoriel que l'on notera E_1. Déterminer une famille génératrice puis une base de E_1.
2. Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On admet que l'ensemble des solutions de l'équation $AX = 2X$ est un espace vectoriel noté E_2. Déterminer une famille génératrice puis une base de E_2.
3. On écrit $E_1 = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $E_2 = \text{Vect}(u_3)$ et on considère $P = (u_1, u_2, u_3)$ une matrice carrée de taille 3 (ses colonnes sont donc les matrices coordonnées de u_1, u_2 et u_3).
   a) Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
   b) Déterminer D définie par $D = P^{-1}AP$.
   c) Montrer que pour tout entier naturel n on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
   d) En déduire A^n pour tout entier naturel n.

1. On a déjà $A \times 0_3 = 0_3$.
Soient X_1 et X_2 des solutions de l'équation, et a et b des réels. Alors :

$$A(aX_1 + bX_2) = A(aX_1) + A(bX_2) = aX_1 + bX_2$$

et donc E_1 est stable par combinaisons linéaires.
Soient $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. On a :

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ure famille génératrice de E_1 est donc : $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).}$

On vérifie que c'est une famille libre : soient λ et $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$$

On a donc bien une base de E_1.

2. $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_1 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 2x_2 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

Une base est donc $\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

3. a) On a donc : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ On inverse P par la méthode miroir :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) On calcule : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) La récurrence classique :
Initialisation :

$$A^0 = I_3 = PI_3P^{-1} = PD^0P^{-1}$$

De plus, comme $D = P^{-1}AP$, on a $A = PDP^{-1}$.
Hérédité : Soit $_n \in N$. On suppose que $A^n = PD^nP^{-1}$.
Alors $A^{n+1} = A^nA \underset{HR}{=} PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^nI_3DP^{-1} = PD^{n+1}P^1$
Conclusion : Par application du principe de récurrence, pour tout entier n on a $\boxed{A^n = PD^nP^{-1}.}$

d) Par récurrence, on montre d'abord que, pour tout entier n, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$. (je vous laisse faire) On peut alors calculer :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2^{n-1}+\frac{1}{2} & 2^{n-1}+\frac{1}{2} & 2^{n-1}-\frac{1}{2} \\ -2^{n-1}+\frac{1}{2} & 2^{n-1}-\frac{1}{2} & 2^{n-1}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : Matrices et polynômes

On se propose de déterminer explicitement le terme général de la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et la relation, valable pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$.

Pour ce faire, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. a) Écrire la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, indépendante de n, telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n.$$
   b) Vérifier que $(A - I)^2(A - 2I) = 0$.
2. On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = (X - 1)^2(X - 2)$.
   a) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence et 1'unicité d'un couple (Q_n, R_n) de $\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}_2[x]$, tel que :
$$x^n = PQ_n + R_n.$$
   b) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n, b_n et c_n tels que :
$$R_n(x) = a_n + b_n(x - 1) + c_n(x - 1)^2.$$
   c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1,\ b_n = n$ et $c_n = 2^n - n - 1$.
3. Utiliser la question précédente pour écrire, pour tout n de $\mathbb{N}$, A^n comme combinaison linéaire de I, $A - I$ et $(A - I)^2$.
4. Pour tout n de $\mathbb{N}$, donner la troisième ligne de la matrice A^n.
5. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

[Edhec 2003]

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrivons :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, calculons :

$$AX_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n \\ du_{n+2} + eu_{n+1} + fu_n \\ gu_{n+2} + hu_{n+1} + iu_n \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$X_{n+1} = AX_n \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n \\ u_{n+2} = du_{n+2} + eu_{n+1} + fu_n \\ u_{n+1} = gu_{n+2} + hu_{n+1} + iu_n \end{cases}.$$

On peut donc poser $\boxed{A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$

b) On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, donc $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et de même $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. On obtient par produit :

$$(A - I_3)^2(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a bien $\boxed{(A - I)^2(A - 2I) = 0.}$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue la division euclidienne de x^n par $P \neq 0_{\mathbb{R}[x]}$: il existe un unique couple (Q_n, R_n) de polynômes tel que :

$$\boxed{x^n = P \times Q_n + R_n \quad \text{avec} \quad \deg(R_n) < \deg(P) = 3.}$$

b) La famille $\mathscr{B} = (1, x-1, (x-1)^2)$ est libre car échelonnée en degrés, de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$. C'est donc une base de l'espace $\mathbb{R}_2[x]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $R_n \in \mathbb{R}_2[x]$, il existe des réels a_n, b_n et c_n (uniques) tels que :

$$\boxed{R_n(X) = a_n + b_n(X - 1) + c_n(X - 1)^2.}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe donc $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x^n = P \times Q_n + a_n + b_n(x - 1) + c_n(x - 1)^2 \qquad (*)$$

Rappelons que $P = (x-1)^2(x-2)$. P est ici sous forme scindée, ses racines sont 1 et 2 de multiplicités respectives 2 et 1. En particulier, on a $P(1) = P'(1) = 0 = P(2)$.

En évaluant $(*)$ en $x = 2$, on obtient :

$$2^n = \underbrace{P(2)}_{=0} Q_n(2) + a_n + b_n + c_n = a_n + b_n + c_n.$$

En évaluant $(*)$ en $x = 1$, on obtient :

$$1 = \underbrace{P(1)}_{=0} Q_n(1) + a_n = a_n.$$

Dérivons à présent $(*)$:

$$nX^{n-1} = (P'Q_n + PQ'_n) + b_n + 2c_n(X - 1).$$

Évaluons cette dernière égalité en $x = 1$:

$$n = (\underbrace{P'(1)}_{=0} Q_n(1) + \underbrace{P(1)}_{=0} Q'_n(1)) + b_n = b_n.$$

On obtient donc $\boxed{a_n = 1,\ b_n = n \text{ et } c_n = 2^n - a_n - b_n = 2^n - n - 1.}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient en substituant A à x dans la relation $(*)$:

$$A^n = \underbrace{P(A)}_{=0_n} \times Q_n(A) + a_n I + b_n(A-I) + c_n(A-I)^2 \boxed{= I + n(A-I) + (2^n - n - 1)(A-I)^2.}$$

4. Calculons $(A-I) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et la dernière ligne de $(A-I_3)^2 = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui nous permet d'obtenir la dernière ligne de A^n :

$$\begin{aligned} &(0 \quad 0 \quad 1) + n\,(0 \quad 1 \quad -1) + (2^n - n - 1)\,(1 \quad -2 \quad 1) \\ &= \boxed{\left(2^n - n - 1 \quad -2^{n+1} + 3n + 2 \quad 2^n - 2n\right).} \end{aligned}$$

5. a) Montrons ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Init. Pour $n = 0$, on a d'après l'énoncé $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. D'où la propriété pour $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n. Montrons là au rang $n+1$:

$$X_{n+1} \overset{1.(a)}{=} AX_n \overset{H.R.}{=} A\left(A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = A^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

Concl. Par principe de récurrence, on obtient bien que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$

b) Dans la relation de la question précédente, identifions les dernières lignes : le coefficient à la dernière ligne de X_n est u_n, et il s'obtient à partir de la 3-ème ligne de A^n (que nous avons déterminé précédemment) et du vecteur X_0. Autrement dit :

$$\begin{aligned} X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ 2^n - n - 1 & -2^{n+1} + 3n + 2 & 2^n - 2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ 2^n - n - 1 + (-2^{n+1} + 3n + 2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - n - 1 + (-2^{n+1} + 3n + 2) = -2^n + 2n + 1.}$$

Exercice 5 : Polynômes d'interpolation de Lagrange - Reprise DM

Soit $n \in \mathbb{N}$, soient n nombres réels tous distincts $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et soient $y_1, y_2, \ldots y_n$, n nombres réels (pas forcément distincts).

L'objectif est de trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que

$$P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, \ldots P(x_n) = y_n$$

Un tel problème est appelé "problème d'interpolation".

Autrement dit : on cherche un polynôme qui "passe" par les "points" de coordonnée (x_i, y_i). Vous réutiliserez en deuxième année ces polynômes dans le cas particulier où $y_1 = 1$ et $y_2 = y_3 = ... = 0$, mais on va présenter ici une méthode "universelle", attribuée à Lagrange (1736-1813).

Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on considère le polynôme L_j suivant :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \neq j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

1. **Cas particulier :** on suppose $n = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$.
   a) Écrire les polynômes L_1, L_2 et L_3 sans utiliser le symbole $\prod$ et calculer $L_i(x_j)$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$.
   b) Soient y_1, y_2 et y_3 trois réels et soit $P = y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3$.
      i. Justifier (sans le calculer explicitement) que P est de degré au plus 2.
      ii. Montrer que $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{1; 2; 3\}$.
2. **Cas général :** on suppose n quelconque, x_1, x_2,...,x_n quelconques (mais distincts)
   a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer le degré de L_i.
   b) Quels sont les racines de L_i ?
   c) Calculer $L_i(x_j)$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
   d) Soit $P = \sum_{j=1}^{n} y_j L_j$
      i. Justifier que $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$
      ii. Montrer que ce polynôme P répond au problème d'interpolation.
   e) Soit Q un autre polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ qui répond au problème d'interpolation. Étudier les racines du polynôme $P - Q$ et en déduire que $P = Q$.
3. En utilisant les polynômes d'interpolation, déterminer l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant $P(-1) = 1$, $P(-2) = 3$, $P(1) = 9$ et $P(2) = 3$.

---

1. a) On a $L_1(x) = \dfrac{(x-2)}{1-2}\dfrac{(x-3)}{1-3} = \dfrac{1}{2}(x-2)(x-3)$,
   $L_2(x) = \dfrac{(x-1)}{2-1}\dfrac{(x-3)}{2-3} = -(x-1)(x-3)$
   et $L_3(x) = \dfrac{(x-1)}{3-1}\dfrac{(x-2)}{3-2} = \dfrac{1}{2}(x-1)(x-2)$
   Ensuite, on a
   $L_1(x_1) = L_1(1) = \dfrac{1}{2}(-1)(-2) = 1$, $L_1(2) = 0$ et $L_1(3) = 0$.
   Puis $L_2(1) = 0$, $L_2(2) = 1$ et $L_3(3) = 0$
   Enfin $L_3(1) = 0$, $L_3(2) = 0$ et $L_3(3) = 1$.
   b) i. L_1, L_2 et L_3 sont de degré 2, donc en les multipliant par y_1, y_2 ou y_3, ils

deviennent soit nul, soit de degré 2.
De plus, en additionnant des polynômes de degré 2, on obtient un polynôme de degré inférieur ou égale 2 (propriété du cours).
Au final, on a bien $P \in \mathbb{R}_2[x]$.

ii. C'est immédiat d'après le calcul effectué en a) :
$P(1) = y_1 \times 1 + y_2 \times 0 + y_3 \times 3 = y_1$.
On a de même $P(2) = y_2$ et $P(3) = y_3$.

2. a) L_i est un produit de $n-1$ polynômes de degré 1. C'est donc un polynôme de degré $(n-1) \times 1 = n-1$.

b) L_i est donné sous sa forme factorisé : les racines sont évidentes et ce sont tous les x_k avec $k \neq i$. (C'est à dire $n-1$ racines)

c) D'après ce qu'on vient de dire, $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$. Si $i = j$, alors

$$L_i(x_i) = \prod_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \neq i}} \frac{x_i - x_k}{x_i - x_k} = \prod_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \neq i}} 1 = 1$$

d) i. C'est la même justification que pour la question 1bi) : P est une combinaison linéaire de polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$, donc $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

ii. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j L_j(x_i)$$

Or $L_j(x_i) = 0$ si $i \neq j$, et $L_j(x_i) = 1$ si $i = j$. Donc dans la somme définissant P, il ne reste qu'un terme non nul : $y_i \times 1$.
Ainsi, $P(x_i) = y_i$ et le polynôme P répond bien au problème d'interpolation.

e) Comme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, alors $P - Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$.
De plus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $P(x_i) = y_i$ et $Q(x_i) = y_i$, donc $(P-Q)(x_i) = 0$.
Ainsi, tous les x_i sont racines de $P - Q$. Comme ils sont distincts, on a donc n racines distinctes pour $P - Q$, qui est de degré inférieur à $n-1$.
Par conséquent, $P - Q$ est le polynôme nul, donc $P = Q$.
Il y a bien unicité du polynôme d'interpolation...

3. Cette fois, $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$ et $x_4 = 2$.
On a 4 polynômes à calculer :

$$L_1(x) = \frac{(x+2)}{-1+2}\frac{(x-1)}{-1-1}\frac{(x-2)}{-1-2} = \frac{1}{6}(x+2)(x-1)(x-2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)}{-2+1}\frac{(x-1)}{-2-1}\frac{(x-2)}{-2-2} = \frac{-1}{12}(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)}{1+1}\frac{(x+2)}{1+2}\frac{(x-2)}{1-2} = \frac{-1}{6}(x+1)(x+2)(x-2)$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)}{2+1}\frac{(x+2)}{2+2}\frac{(x-1)}{2-1} = \frac{1}{12}(x+1)(x+2)(x-1)$$

D'après l'étude précédente, il suffit de prendre $P(x) = L_1(x) + 3L_2(x) + 9L_3(x) + 3L_4(x)$

ce polynôme est bien de degré 3 et répond au problème. Le calcul explicite (en développant) n'apporte pas grand chose, si ce n'est un entrainement pour du calcul de fractions...

Remarque pour aller plus loin : Les polynômes de Lagrange constituent des bases de l'ensemble $\mathbb{R}_{n-1}[x]$, c'est à dire des briques "élémentaires" permettant de construire tous les polynômes de degré inférieur à $n-1$.
Les coefficients qu'on met devant ces polynômes (et qui permettent donc de répondre au problème d'interpolation) sont appelés "coordonnées". Il est intéressant de voir que le polynôme qui passe par -1, -2, 1 et 2 a pour coordonnées $(-1,-2,1,2)$.
D'un point de vue formel, c'est donc extrêmement efficace : on peut facilement écrire des programmes qui calculeront de manière rapide et efficace le polynôme qui "va bien" pour notre problème.

Exercice 6 : Déplacement d'un pion sur un triangle

On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points. A l'étape $n=0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

— le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ;

— pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n" et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n". On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = P(A_n),\ b_n = P(B_n),\ c_n = P(C_n) \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les nombres a_n, b_n et c_n pour $n = 0, 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1}.
3. Donner une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = MV_n$.
4. Trouver une matrice J telle que $M = \dfrac{1}{4}(I_3 + J)$.
5. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, J^n.
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}.$$
Indication : on pourra tenter d'écrire 4^n en utilisant une formule bien connue.
7. En déduire une expression de a_n, b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. Déterminer les limites respectives des suites (a_n), (b_n) et (c_n). Interpréter le résultat.

1. $\boxed{a_0 = 1,\ b_0 = 0,\ c_0 = 0}$ puisque le pion commence en A. Puis :

$a_1 = P(A_1) = P(A_1 \cap A_0) + P(A_1 \cap B_0) + P(A_1 \cap C_0)$ Par les probas totales
$= \boxed{\dfrac{1}{2}.}$

De même,

$$\boxed{b_1 = \frac{1}{4} \text{ et } c_1 = \frac{1}{4}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n) + P(A_{n+1} \cap C_n) \quad \text{(probas totales)} \\ &= P_{A_n} P(A_{n+1}) P(A_n) + P_{B_n} P(A_{n+1}) P(B_n) + P_{C_n} P(A_{n+1}) P(C_n) \quad \text{(formule de Bayes)} \\ &\boxed{= \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n} \end{aligned}$$

On obtient de même :

$$\boxed{b_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} c_n} \text{ et } \boxed{c_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{2} c_n}$$

3. D'après la question précédente, on trouve sans difficultés que $\boxed{M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$

4. $\boxed{M = \frac{1}{4}(I_3 + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix})}$

5. On calcule $J^2 = 3J$. Montrons alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J^n = 3^{n-1} J$:
Initialisation : Pour $n = 1$ on a $3^{n-1} = 3^0 = 1$ et donc la formule est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on suppose que $J^n = 3^{n-1} J$, montrons que $J^{n+1} = 3^n J$:

$$J^{n+1} = J^n J = 3^{n-1} JJ = 3^{n-1}.3.J \boxed{= 3^n J}$$

Conclusion : Par application du principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J^n = 3^{n-1} J.}$

6. On utilise ici le binôme de Newton. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
M^n &= \left(\frac{1}{4}\right)^n (I_3 + J)^n \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I_3^{n-k} \quad \text{Newton car les matrices commutent} \\
&= \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k \\
&= \frac{1}{4^n} \left(\binom{n}{0} J^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} J^k\right) \quad \text{On isole le terme 0 pour utiliser Q.5) sur le reste} \\
&= \frac{1}{4^n} \left(I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} J\right) \\
&= \frac{1}{4^n} \left(I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k \frac{1}{3}\right) J\right) \quad \text{On essaye de faire apparaître Newton} \\
&= \frac{1}{4^n} \left(I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k - \binom{n}{0} 3^0\right) J\right) \\
&= \frac{1}{4^n} \left(I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 1^{n-k} - 1\right) J\right) \\
&= \frac{1}{4^n} \left(I_3 + \frac{1}{3}(4^n - 1) J\right) \quad \text{Newton avec } (3+1)^n \\
&= \frac{1}{3.4^n} \left(3.I_3 + (4^n - 1) J\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}.}$$

7. Par la même récurrence que dans l'exercice 2, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3.4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 \\ 4^n - 1 \\ 4^n - 1 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{2}{4^n} \\ 1 - \dfrac{1}{4^n} \\ 1 - \dfrac{1}{4^n} \end{pmatrix}}$$

8. Les trois limites sont $\boxed{\frac{1}{3}}$. Ce n'est pas surprenant : la seule chose qui change entre les trois positions est la situation initiale mais les règles d'évolution sont ensuite les mêmes. Au bout d'un long moment, on s'attend à ce que l'information initiale soit diluée dans le hasard répété.

****Bon courage à toutes et tous !****