La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices. Malgré son intitulé, ce sujet n'est pas facile, juste un peu plus que l'autre : pas d'inquiétude si vous avez du mal
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laisser une marge à gauche et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**
4. Le sujet comporte 4 pages et 6 exercices.

Exercice 1 : Questions de cours

1. Énoncer le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis
2. Énoncer et démontrer le lien entre monotonie et fonction dérivable
3. Donner la définition de trois différentes limites (au moins une fonction et une suite). Vous pourrez faire un dessin pour illustrer la situation.
4. Rappeler la formule de la dérivée d'un produit et la démontrer.

Exercice 2 : des questions proches du cours

1. Calculez les limites suivantes :

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x^3-2x^5}{7x-3x^4+8x^5}$ c) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\sqrt{x^2-x+2}-2}{x^3+3x^2+5x+3}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(\cos(x))}{x}$

   b) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3-x^2-6x+8}{x^2-3x+2}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3+e^x+2}{e^{2x}+\ln(x)+x^5}$ f) $\lim\limits_{x\to0} \exp\left(\dfrac{x\ln(1+x)}{\sin x^2}\right)$

2. Un fumeur cherche à arrêter de fumer. Il est tiraillé entre le manque de volonté et la mauvaise conscience : si un jour il est parvenu à ne pas fumer, il fume le lendemain avec la probabilité 1/2. Si il a fumé un jour, il refumera le lendemain avec la probabilité 1/4. On note p_n la proba qu'il fume le n-ème jour.
   Déterminez p_{n+1} en fonction de p_n, puis p_n en fonction de p_1 et n et déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.
3. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies conjointement par $u_0 = 0$ et $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{3u_{n-1}+v_{n-1}}{4} \qquad v_n = \frac{u_{n-1}+3v_{n-1}}{4}$$

   a) Écrire un programme Python qui calcule les $n$ièmes termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de (v_n).
   b) Montrez que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite l.
   c) Exprimez le terme général de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $t_n = u_n + v_n$. En déduire la valeur de l.

Exercice 3 : la fonction tangente hyperbolique

On appelle "tangente hyperbolique" la fonction notée tanh, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier cette fonction, sa dérivée et sa bijection réciproque.

Partie 1 : Etude de tanh

1. Montrer que tanh est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer sa dérivée et donnez le tableau de variations de tanh.
2. Etudier les branches infinies de tanh.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe au point A d'abscisse 0.
4. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_{\tanh}$ dans un repère orthonormé ainsi que ses asymptotes éventuelles et sa tangente en A.

Partie 2 : Etude de $argth$

1. Montrer que tanh est bijective de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à déterminer.
2. On appelle $argth$ la bijection réciproque de tanh.
   a) Sans calculer la dérivée, donner le tableau de variation de $argth$.
   b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tanh'(x) = 1 - \big(\tanh(x)\big)^2$.
   c) En déduire que $argth$ est dérivable sur I.
   Donner une expression de $(argth)'(y)$ pour tout $y \in I$.
   (On rappelle la formule de la dérivée de la bijection réciproque, laissant au candidat le soin de rappeler les hypothèses : $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$)
3. Une particularité de $tanh$ est que l'on peut en réalité calculer explicitement sa bijection réciproque :
   a) Vérifier que, pour tout réel x, $\quad \tanh(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.
   b) En déduire, en résolvant une équation, l'expression de $argth(y)$ en fonction de y, pour tout $y \in I$.
   c) Justifier la dérivabilité et retrouvez le résultat obtenu à la question **2c)**.

Exercice 4 : Intégration

On pose, si n et p sont des entiers naturels :

$$I(n,p) = \int_0^1 (1-x)^n x^p dx$$

1. Trouver une relation entre $I(n,p)$ et $I(n+1,p-1)$.
2. En déduire la valeur de $I(n,p)$.

Exercice 5 : Suite implicite

Partie I

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

1. Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ admet une unique solution positive que l'on notera r_2 et vérifier que $r_2 \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.
2. Vérifier que $f(r_2) = r_2$.
3. Vérifier que pour tout $(a, b) \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]^2$, $|f(b) - f(a)| \leq \dfrac{4}{9}|b - a|$.
4. On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Écrire une fonction Python d'en-tête **def suite(n) :** qui renvoie la valeur de u_n.
   b) Montrer que pour tout entier $n, u_n \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.
   c) Prouver alors : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r_2| \leq \dfrac{4}{9}|u_n - r_2|$ puis $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - r_2| \leq \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.
   d) La suite u converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.
   e) Écrire alors un programme Python qui donne une valeur approchée de r_2 à 10^{-3} près.

Partie II

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note f_N la fonction polynôme définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_N(x) = x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - 1$.

5. Montrer que f_N est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
6. Montrer que l'équation $f_N(x) = 0$ possède une unique solution positive, que l'on notera x_N. Vérifier que $x_N \in [0, 1]$.
7. Écrire un programme **Python** qui calcule une valeur approchée à 10^{-6} de x_N.
8. Montrer la relation (*) : pour tout $x \in \mathbb{R}, (x-1)f_N(x) = x^{N+1} - 2x + 1$.
9. Déterminer le signe de $f_{N+1}(x) - f_N(x)$ pour $x \in [0, 1]$.
10. En déduire que la suite $(x_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
11. Montrer que la suite (x_N) converge vers un nombre $x^* \in [0, 1]$.
12. Montrer que pour tout entier $N \geq 2, 0 < x_N \leq r_2$ où le réel r_2 a été introduit en partie I.
    En déduire : $\lim\limits_{N \to +\infty} (x_N)^N = 0$.
13. À l'aide de la relation (*), déterminer la valeur de x^*.

Exercice 6 : Probabilités - E3A 2022

1. a) Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Donner, sans démonstration, la limite quand n tend vers l'infini de l'expression :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

   b) Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer en fonction de m la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^m$.

   c) Soit n un entier non nul. Donner, avec démonstration, l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

Soient k et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. On dispose de k urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard de chaque urne et on désigne par X_n la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus. On suppose que les tirages sont indépendants les uns des autres.

2. Donner l'ensemble J des valeurs prises par X_n.
3. Soit $j \in J$. Évaluer $\mathbb{P}(X_n \leqslant j)$ et prouver que l'on a : $\mathbb{P}(X_n = j) = \dfrac{j^k-(j-1)^k}{n^k}$.
4. Démontrer que l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n peut s'écrire :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > j).$$

5. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.
6. Lorsque $k = 1$, reconnaître la loi de X_n et vérifier la cohérence du résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 7 : un peu plus dur

On donne que l'ensemble $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions numériques définies et de classe C^2 (dérivables deux fois de dérivée seconde continue) sur $\mathbb{R}$, muni des lois habituelles, possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Dans cette partie, on note E l'ensemble des fonctions $\varphi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient la relation (*) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi''(x) = \left(1+x^2\right)\varphi(x)$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si u et v sont deux éléments de E, alors $u'v - v'u$ est une fonction constante.
3. Soit f la fonction définie, pour tout réel x, par : $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$
   a) Vérifier que f est élément de E.
   b) Soit g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x)\displaystyle\int_0^x \frac{1}{f(t)^2}dt$. Montrer que g est élément de E.
4. a) Soit h une solution de (*). Montrer qu'il existe un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que $\left(\dfrac{h}{f}\right)' = c\dfrac{1}{f^2}$.
   b) En déduire qu'il existe $(b, c) \in \mathbb{R}^2$, tel que $h = cg + bf$.
   c) Montrer finalement que (f, g) est une base de E.