DS 6 - Variables aléatoires, intégration, séries, applications linéaires.
Version facile

La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laisser une marge à gauche et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Exercice 1 - Questions de cours

1. Que signifie $E \oplus G$? Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce soit le cas, avec démo
2. Rappeler les formules (en citant bien les hypothèses !) des séries géométriques et ses deux dérivées. Redonner la preuve du résultat sur la série géométrique et sur la série géométrique dérivée première.
3. Compléter la phrase suivante et démontrer le résultat : une application linéaire est injective ...

Exercice 2 - Applications linéaires 1

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (3x - 2y - z, y, 2x - 2y, y + 2t)$$

1. Montrez que f est linéaire.
2. Soit le polynôme $P(x) = x^2 - 3x + 2$. Calculez $P(f)$.
3. En déduire que f est un automorphisme et donner une expression analytique de f^{-1}.
4. Déterminez pour tout $n \geq 2$ le reste par la division euclidienne de x^n par $P(x)$.
5. En déduire qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que vous préciserez, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n = a_n f + b_n id_{\mathbb{R}^4}$$

6. En déduire $f^n(e_i)$ où les e_i forment la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4 - Probabilités générales

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On note $p_n = P(A_n)$.

On note $B = \bigcap_{n\geq 1} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right)$.

1. Expliquer pourquoi on a :

$$B = \{\omega \in \Omega,\ \omega \text{ appartient à une infinité des } A_n\}.$$

2. On suppose que la série $\sum_k P(A_k)$ converge. Montrer que $P(B) = 0$.
3. On suppose que les évènements (A_n) sont indépendants, et que la série $\sum_k P(A_k)$ est divergente.

   a) Montrer que l'évènement $\overline{B}$ est égal à $\bigcup_{n\geq 1} \left(\bigcap_{k\geq n} \overline{A_k} \right)$.

b) Exprimer $P\left(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right)$ en fonction des p_k.

c) Montrer que la série $\sum_k \ln(1-p_k)$ est divergente.

On pourra pour cela discuter des cas $p_k \to 0$ et $p_k \nrightarrow 0$.

d) En déduire que $P(B) = 1$.

Exercice 5 - Ecricome Maths Appro 2024 1/3 de Sujet

1. Rappeler en fonction du réel α, la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

   On note alors $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et pour tout entier naturel N non nul : $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ et $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. a) En étudiant la monotonie de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$, montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :
   $$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

   b) En déduire que pour tout entier naturel N non nul :
   $$\frac{1}{N+1} \leqslant R_N \leqslant \frac{1}{N}$$

3. Déterminer un entier naturel N_0 tel que : $\forall N \geqslant N_0, |S_N - S| \leqslant 10^{-3}$.

4. On pose pour tout entier naturel N non nul : $T_N = S_N + \frac{1}{N+1}$.

   a) Montrer que pour tout entier naturel N non nul :
   $$|T_N - S| \leqslant \frac{1}{N^2}.$$

   b) Déterminer un entier naturel N_1 strictement inférieur à N_0 tel que $\forall N \geqslant N_1, |T_N - S| \leqslant 10^{-3}$.

   On pose maintenant pour tout couple (n,p) d'entiers naturels non nuls :
   $$u_n(p) = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}.$$

5. Soit p un entier naturel non nul.

   a) Donner un équivalent simple de $u_n(p)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   b) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n(p)$.

   On pose pour tout entier naturel p non nul :
   $$U(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(p)$$

6. a) Déterminer deux réels a, b vérifiant pour tout entier naturel n non nul : $u_n(1) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.

   b) En déduire la valeur de $U(1)$.

7. a) Exprimer, pour tout couple d'entiers naturels (n,p) tel que $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 2, u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1)$ en fonction de p et de $u_n(p)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel p non nul : $U(p) = \dfrac{1}{p \times p!}$.

8. a) Montrer, par récurrence sur p, que pour tout entier naturel p non nul, pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{p!}{n^2(n+1)\dots(n+p)} + \sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k)$$

b) En déduire que pour tout entier naturel p non nul : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)}$ converge et

$$S = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} + p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\cdots(n+p)}.$$

9. En reprenant la méthode de la question 2, que l'on appliquera cette fois à la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{p+2}}$, montrer que pour tout couple (N,p) d'entiers naturels non nuls :

$$0 \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)} \leqslant \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{N^{p+1}}.$$

10. On suppose maintenant que $p = 3$. On pose donc pour tout entier naturel N non nul :

$$U_N = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k^2} + 3! \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{49}{36} + 6 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Déterminer un entier N_2 tel que $\forall N \geqslant N_2, |U_N - S| \leqslant 10^{-3}$.

11. On représente sur la figure 1 l'évolution des erreurs d'approximation de S par S_N, T_N et U_N, respectivement. Commenter ce graphique, à la lumière des réponses apportées aux questions précédentes.

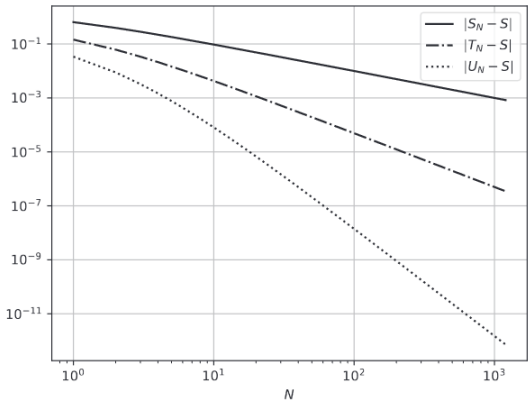


FIGURE 1 – Évolution des erreurs d'approximation de S par S_N, T_N et U_N.