DS 6 - Variables aléatoires, intégration, séries, applications linéaires.
Version facile

La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laisser une marge à gauche et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Exercice 1 - Questions de cours

1. Que signifie $E \oplus G$? Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce soit le cas, avec démo
2. Rappeler les formules (en citant bien les hypothèses !) des séries géométriques et ses deux dérivées. Redonner la preuve du résultat sur la série géométrique et sur la série géométrique dérivée première.
3. Compléter la phrase suivante et démontrer le résultat : une application linéaire est injective ...

Exercice 2 - Applications linéaires 1

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (3x - 2y - z, y, 2x - 2y, y + 2t)$$

1. Montrez que f est linéaire.
2. Soit le polynôme $P(x) = x^2 - 3x + 2$. Calculez $P(f)$.
3. En déduire que f est un automorphisme et donner une expression analytique de f^{-1}.
4. Déterminez pour tout $n \geq 2$ le reste par la division euclidienne de x^n par $P(x)$.
5. En déduire qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que vous préciserez, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n = a_n f + b_n id_{\mathbb{R}^4}$$

6. En déduire $f^n(e_i)$ où les e_i forment la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (3x - 2y - z, y, 2x - 2y, y + 2t).$$

1. **Montrer que f est linéaire.**
   Pour montrer que f est linéaire, il suffit de vérifier que f respecte les deux propriétés suivantes :
   — $f(u + v) = f(u) + f(v)$ pour tous $u, v \in \mathbb{R}^4$.
   — $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^4$.
   Soit $u = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $v = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. On a :

   $$f(u + v) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2).$$

   En appliquant la définition de f, on obtient :

   $$f(u+v) = \big(3(x_1+x_2)-2(y_1+y_2)-(z_1+z_2), y_1+y_2, 2(x_1+x_2)-2(y_1+y_2), (y_1+y_2)+2(t_1+t_2)\big).$$

En développant, cela donne :

$$f(u+v) = \big((3x_1-2y_1-z_1)+(3x_2-2y_2-z_2), y_1+y_2, (2x_1-2y_1)+(2x_2-2y_2), (y_1+2t_1)+(y_2+2t_2)\big).$$

Or, cela correspond à $f(u) + f(v)$. Donc $f(u + v) = f(u) + f(v)$.
De même, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda u) = f(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1, \lambda t_1).$$

En appliquant la définition de f, on obtient :

$$f(\lambda u) = \big(3(\lambda x_1) - 2(\lambda y_1) - (\lambda z_1), \lambda y_1, 2(\lambda x_1) - 2(\lambda y_1), \lambda y_1 + 2(\lambda t_1)\big).$$

Cela donne :

$$f(\lambda u) = \lambda\big(3x_1 - 2y_1 - z_1, y_1, 2x_1 - 2y_1, y_1 + 2t_1\big) = \lambda f(u).$$

Ainsi, f est linéaire.

2. **Calculer $P(f)$ pour $P(x) = x^2 - 3x + 2$.**
On rappelle que $P(f) = f^2 - 3f + 2I$, où $f^2 = f \circ f$ et I est l'identité sur $\mathbb{R}^4$.
Calculons f^2. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$f(x, y, z, t) = (3x - 2y - z, y, 2x - 2y, y + 2t).$$

En appliquant f une seconde fois :

$$\begin{aligned} f^2(x, y, z, t) &= f(3x - 2y - z, y, 2x - 2y, y + 2t) \\ &= \big(3(3x - 2y - z) - 2y - (2x - 2y), y, 2(3x - 2y - z) - 2y, y + 2(y + 2t)\big) \\ &= \big(9x - 6y - 3z - 2y - 2x + 4y, y, 6x - 4y - 2z - 2y, y + 2y + 4t\big) \\ &= \big(7x - 4y - 3z, y, 6x - 6y - 2z, 3y + 4t\big). \end{aligned}$$

Maintenant, calculons $P(f)$:

$$P(f)(x, y, z, t) = f^2(x, y, z, t) - 3f(x, y, z, t) + 2(x, y, z, t).$$

En substituant les expressions de f^2 et f, et en simplifiant, on obtient :

$$\boxed{P(f)(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0).}$$

Donc $P(f) = 0$.

3. **En déduire que f est un automorphisme et donner une expression analytique de f^{-1}.**
Puisque $P(f) = 0$, on a :

$$f^2 - 3f + 2I = 0 \implies f \circ (3I - f) = 2I.$$

Donc f^{-1} existe et :

$$\boxed{f^{-1} = \frac{1}{2}(3I - f).}$$

4. **Déterminer le reste par la division euclidienne de x^n par $P(x)$ pour $n \geq 2$.**
Le polynôme $P(x) = x^2 - 3x + 2$ se factorise en $P(x) = (x - 1)(x - 2)$. Par le théorème de division euclidienne, pour tout $n \geq 2$, il existe des constantes $a, b \in \mathbb{R}$ telles que :

$$x^n = Q(x)P(x) + ax + b,$$

où $Q(x)$ est le quotient. On évaluera x^n en 1 et 2 pour déterminer a et b :

— En évaluant en $x = 1$, on a :

$$1^n = Q(1)P(1) + a(1) + b \implies 1 = 0 + a + b \implies a + b = 1.$$

— En évaluant en $x = 2$, on a :

$$2^n = Q(2)P(2) + a(2) + b \implies 2^n = 0 + 2a + b \implies 2a + b = 2^n.$$

En résolvant le système :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2^n \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 - a \\ 2a + (1 - a) = 2^n \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 - a \\ a + 1 = 2^n \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 - a \\ a = 2^n - 1 \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{x^n = Q(x)P(x) + (2^n - 1)x + (1 - (2^n - 1)) = Q(x)P(x) + (2^n - 1)x + 2 - 2^n.}$$

5. **Exprimer f^n sous la forme $f^n = a_n f + b_n I$.**
En utilisant le résultat précédent, on a :

$$\begin{aligned} f^n &= Q(f)P(f) + (2^n - 1)f + (2 - 2^n)I \\ &= (2^n - 1)f + (2 - 2^n)I \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\boxed{a_n = 2^n - 1 \text{ et } b_n = 2 - 2^n.}$

6. **En déduire $f^n(e_i)$ où les e_i forment la base canonique de $\mathbb{R}^4$.**
Pour calculer $f^n(e_i)$, utilisons la formule précédente : $f^n = a_n f + b_n I$ avec $a_n = 2^n - 1$ et $b_n = 2 - 2^n$.
Calculons d'abord $f(e_i)$ pour chaque vecteur de base :
— $f(e_1) = (3, 0, 2, 0)$
— $f(e_2) = (-2, 1, -2, 1)$
— $f(e_3) = (-1, 0, 0, 0)$
— $f(e_4) = (0, 0, 0, 2)$
Donc, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} f^n(e_1) &= (2^n - 1)(3, 0, 2, 0) + (2 - 2^n)(1, 0, 0, 0) = (3 \cdot 2^n - 3 + 2 - 2^n, 0, 2 \cdot 2^n - 2, 0) \\ f^n(e_2) &= (2^n - 1)(-2, 1, -2, 1) + (2 - 2^n)(0, 1, 0, 0) = (-2 \cdot 2^n + 2, 1, -2 \cdot 2^n + 2, 2^n - 1) \\ f^n(e_3) &= (2^n - 1)(-1, 0, 0, 0) + (2 - 2^n)(0, 0, 1, 0) = (-2^n + 1, 0, 2 - 2^n, 0) \\ f^n(e_4) &= (2^n - 1)(0, 0, 0, 2) + (2 - 2^n)(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 2^n) \end{aligned}$$

La matrice de f^n dans la base canonique est donc :

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2^n + 2 & -2 \cdot 2^n + 2 & -2^n + 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 \cdot 2^n - 2 & -2 \cdot 2^n + 2 & 2 - 2^n & 0 \\ 0 & 2^n - 1 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 3 - Applications linéaires 2

On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre 2 telles que : $AM = MD$.
   a) Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que M appartient à E si et seulement si : $z = 0$ et $y = t$.

c) Établir que (U, A) est une base de E.

d) A-t-on $UA \in E$?

2. On note f l'application définie pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par : $f(M) = AM - MD$.

a) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Déterminer le noyau de f et donner sa dimension.

c) Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $f(M) = M$.

d) Montrer que la famille (U, A, B, C) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, où $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

e) En utilisant la base précédente, montrer que $f \circ f \circ f = f$.

On pourra utiliser sans calculs que $f(C) = -C$.

1. a) Soit $M_1, M_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition, $M_1, M_2 \in E$ signifie que $AM_1 = M_1D$ et $AM_2 = M_2D$. Montrons que E est stable par combinaison linéaire :

$$A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda AM_1 + AM_2 = \lambda M_1 D + M_2 D = (\lambda M_1 + M_2)D.$$

Donc $\lambda M_1 + M_2 \in E$. Par conséquent, $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

b) Calculons AM et MD :

$$AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix}, \quad MD = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

Pour que $AM = MD$, il faut que :

$$\begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

Cela donne les équations suivantes :

$$z = 0, \quad t = y.$$

Donc $\boxed{M \in E \text{ si et seulement si } z = 0 \text{ et } y = t.}$

c) D'après la question précédente, une matrice $M \in E$ s'écrit sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

On peut décomposer M comme suit :

$$M = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $M = xU + yA$, où U et A sont linéairement indépendants. Par conséquent, (U, A) est une base de E.

d) Calculons UA :

$$UA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifions si $UA \in E$. Pour cela, calculons $A(UA)$ et $(UA)D$:

$$A(UA) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (UA)D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $A(UA) \neq (UA)D$, on a $\boxed{UA \notin E.}$

2. a) Soit $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(\lambda M_1 + M_2) = A(\lambda M_1 + M_2) - (\lambda M_1 + M_2)D.$$

En développant :

$$f(\lambda M_1 + M_2) = \lambda AM_1 + AM_2 - \lambda M_1 D - M_2 D = \lambda f(M_1) + f(M_2).$$

Donc f est linéaire, et comme $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\boxed{\text{c'est un endomorphisme.}}$

b) Le noyau de f est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $f(M) = 0$, c'est-à-dire :

$$AM = MD.$$

D'après la question 1.b, cela équivaut à $z = 0$ et $y = t$. Donc :

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} = xU + yA.$$

Ainsi, le noyau de f est engendré par (U, A), et sa dimension est 2.

c) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ alors d'après les calculs du 1(b)

$$f(M) = \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t-y \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$f(M) = M \iff \begin{cases} z = x & y = t - y \\ z = z & t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = t = 0 \end{cases}$$

Donc l'ensemble de ces matrices est $\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \boxed{\text{Vect}(B)}$

d) Une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ doit contenir 4 vecteurs linéairement indépendants. Vérifions que (U, A, B, C) est une famille génératrice :

$$\forall M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad M = xU + yC + zB + (t-y)A.$$

Donc (U, A, B, C) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

e) Il suffit de calculer $f^3(e_i)$ pour $e_i \in (U, A, B, C)$:

— $f(U) = 0 \implies f^3(U) = 0 = f(U)$.

— $f(A) = 00 \implies f^3(A) = 0 = f(A)$.

— $f(B) = B \implies f^3(B) = B = f(B)$.

— $f(C) = -C \implies f^2(C) = C \implies f^3(C) = -C = f(C)$.

On a donc, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$M = aU + bA + cB + dC \implies f^3(M) = af(U) + bf(A) + cf(B) + df(C) = f(M).$$

Donc $\boxed{f^3 = f.}$

Exercice 4 - Probabilités générales

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On note $p_n = P(A_n)$.

On note $B = \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$.

1. Expliquer pourquoi on a :
$$B = \{\omega \in \Omega,\ \omega \text{ appartient à une infinité des } A_n\}.$$
2. On suppose que la série $\sum_k P(A_k)$ converge. Montrer que $P(B) = 0$.
3. On suppose que les évènements (A_n) sont indépendants, et que la série $\sum_k P(A_k)$ est divergente.
   a) Montrer que l'évènement $\overline{B}$ est égal à $\bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n}\overline{A_k}\right)$.
   b) Exprimer $P\left(\bigcap_{k=n}^{m}\overline{A_k}\right)$ en fonction des p_k.
   c) Montrer que la série $\sum_k \ln(1-p_k)$ est divergente.
   On pourra pour cela discuter des cas $p_k \to 0$ et $p_k \nrightarrow 0$.
   d) En déduire que $P(B) = 1$.

1. L'évènement $\bigcup_{k\geq n} A_k$ correspond aux éléments ω qui appartiennent à au moins un A_k avec $k \geq n$.
   Donc $\bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$ correspond aux éléments ω qui, pour tout $n \geq 1$, appartiennent à au moins un A_k avec $k \geq n$.
   Autrement dit, quel que soit le rang n choisi, ω appartient encore à au moins un A_k de rang supérieur à n. Cela signifie exactement que ω appartient à une infinité de A_k.
2. On utilise la limite monotone : la suite $\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)_{n\geq 1}$ est décroissante, donc :
$$0 \leq P(B) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k).$$
   Car comme la série $\sum P(A_k)$ converge, $\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$ existe et $\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
   Donc $\boxed{P(B) = 0.}$
3. a) Par les lois de Morgan généralisées, on a
$$\overline{B} = \overline{\bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)} = \bigcup_{n\geq 1}\overline{\bigcup_{k\geq n} A_k} = \bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n}\overline{A_k}\right).$$
   b) Par indépendance des évènements :
$$P\left(\bigcap_{k=n}^{m}\overline{A_k}\right) = \prod_{k=n}^{m} P(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^{m}(1-p_k).$$

c) Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, alors $(\ln(1-p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 (sinon en passant à l'exponentielle on aurait $\lim 1-p_n = 1$ par continuité). Donc la série diverge grossièrement.
Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors on a :

$$\ln(1-p_k) \sim -p_k$$

Or $\sum p_k$ diverge, donc $\sum \ln(1-p_k)$ diverge vers $-\infty$ par comparaison des séries à termes constants.

d) On utilise encore la limite monotone, deux fois. D'abord : $P\left(\bigcap_{k\geq n} \overline{A_k}\right) = \lim_{m\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right) = \lim_{m\to+\infty} \prod_{k=n}^{m}(1-p_k) = \lim_{m\to+\infty} \exp\left(\sum_{k=n}^{m} \ln(1-p_k)\right) = 0$
Encore une limite monotone mais cette fois-ci avec

$$P(\overline{B}) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k\geq n} \overline{A_k}\right) = 0$$

Exercice 5 - Ecricome Maths Appro 2024 1/3 de Sujet

1. Rappeler en fonction du réel α, la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

   On note alors $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et pour tout entier naturel N non nul : $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ et $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. a) En étudiant la monotonie de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$, montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

   $$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

   b) En déduire que pour tout entier naturel N non nul :

   $$\frac{1}{N+1} \leqslant R_N \leqslant \frac{1}{N}$$

3. Déterminer un entier naturel N_0 tel que : $\forall N \geqslant N_0, |S_N - S| \leqslant 10^{-3}$.

4. On pose pour tout entier naturel N non nul : $T_N = S_N + \frac{1}{N+1}$.

   a) Montrer que pour tout entier naturel N non nul :

   $$|T_N - S| \leqslant \frac{1}{N^2}.$$

   b) Déterminer un entier naturel N_1 strictement inférieur à N_0 tel que $\forall N \geqslant N_1, |T_N - S| \leqslant 10^{-3}$.

   On pose maintenant pour tout couple (n,p) d'entiers naturels non nuls :

   $$u_n(p) = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}.$$

5. Soit p un entier naturel non nul.

   a) Donner un équivalent simple de $u_n(p)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n(p)$.

On pose pour tout entier naturel p non nul :

$$U(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(p)$$

6. a) Déterminer deux réels a, b vérifiant pour tout entier naturel n non nul : $u_n(1) = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.

   b) En déduire la valeur de $U(1)$.

7. a) Exprimer, pour tout couple d'entiers naturels (n,p) tel que $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 2, u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1)$ en fonction de p et de $u_n(p)$.

   b) Montrer que pour tout entier naturel p non nul : $U(p) = \dfrac{1}{p \times p!}$.

8. a) Montrer, par récurrence sur p, que pour tout entier naturel p non nul, pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{p!}{n^2(n+1)\dots(n+p)} + \sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k)$$

   b) En déduire que pour tout entier naturel p non nul : $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)}$ converge et

$$S = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} + p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\cdots(n+p)}.$$

9. En reprenant la méthode de la question 2, que l'on appliquera cette fois à la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{p+2}}$, montrer que pour tout couple (N,p) d'entiers naturels non nuls :

$$0 \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)} \leqslant \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{N^{p+1}}.$$

10. On suppose maintenant que $p = 3$. On pose donc pour tout entier naturel N non nul :

$$U_N = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k^2} + 3! \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{49}{36} + 6\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

    Déterminer un entier N_2 tel que $\forall N \geqslant N_2, |U_N - S| \leqslant 10^{-3}$.

11. On représente sur la figure 1 l'évolution des erreurs d'approximation de S par S_N, T_N et U_N, respectivement. Commenter ce graphique, à la lumière des réponses apportées aux questions précédentes.

À toutes fins utiles, on donne $31^2 = 961$, $32^2 = 1024$, $3^4 = 81$ et $4^4 = 256$. *erreur du sujet : il aurait fallu donner les valeurs* $6^4 = 1296$ *et* $7^4 = 2401$.

1. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

2. a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ car dérivable de dérivée $t \mapsto -\dfrac{2}{t^3} < 0$.

   Donc pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\begin{gathered} n \leq t \leq n+1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{n^2} \end{gathered}$$

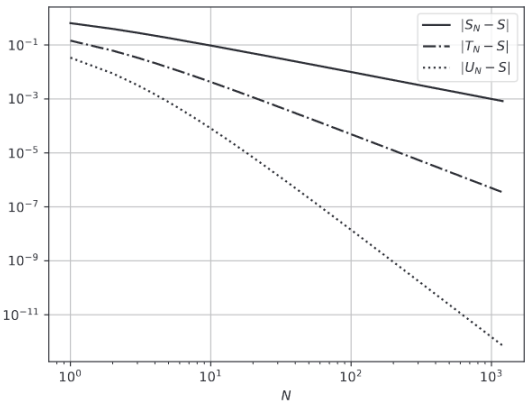


FIGURE 1 – Évolution des erreurs d'approximation de S par S_N, T_N et U_N.

Et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est continue sur $[n; n+1]$. Par croissance de l'intégrale dans le sens croissant des bornes, on a :

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

En regardant ce résultat avec $n-1$ au lieu de n, on a aussi

$$\frac{1}{n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^2}\, dt \leq \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Conclusion : pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$

b) Soit $N \geq 1$ fixé. On a donc $N+1 \geq 2$.
$\forall M > N$, par sommation des inégalités précédentes et par la relation de Chasles, on a :

$$\int_{N+1}^{M+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n^2} \leqslant \int_N^M \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

Or $\displaystyle\int_{N+1}^{M+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[\frac{-1}{t}\right]_{N+1}^{M+1} = \frac{1}{N+1} - \frac{1}{M+1}$ et de même, $\displaystyle\int_N^M \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[\frac{-1}{t}\right]_N^M = \frac{1}{N} - \frac{1}{M}$
Donc $\forall M > N \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{N+1} - \frac{1}{M+1} \leq \sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N} - \frac{1}{M}$$

Or $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{N+1} - \frac{1}{M+1} = \frac{1}{N+1}$ et $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{N} - \frac{1}{M} = \frac{1}{N}$ et $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n^2} = R_N$ comme reste de série convergente.
Donc par inégalités sur les limites, on a :

pour tout entier naturel $N \geq 1$: $\dfrac{1}{N+1} \leqslant R_N \leqslant \dfrac{1}{N}$

3. $|S_N - S| = |-R_N| = R_N \leqslant \dfrac{1}{N}$ d'après la question précédente.

Il suffit que $\frac{1}{N} \leq 10^{-3}$ pour avoir ce que l'on souhaite, donc que $N \geq 10^3$. $\boxed{N_0 = 1000 \text{ convient}}$

4. a) Soit $N \geq 1$ fixé. On a $|T_N - S| = |S - T_N| = \left|R_N - \frac{1}{N+1}\right|$.

   Or $\frac{1}{N+1} \leqslant R_N \leqslant \frac{1}{N}$ donc $0 \leqslant R_N - \frac{1}{N+1} \leqslant \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}$, et $\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = \frac{1}{N(N+1)} \leq \frac{1}{N^2}$.

   $$\boxed{\text{pour tout entier naturel } N \geq 1 : |T_N - S| \leqslant \frac{1}{N^2}}$$

   b) Il suffit que $\frac{1}{N^2} \leq 10^{-3}$ pour avoir ce que l'on souhaite, donc que $N^2 \geq 10^3$. D'après les données numériques de l'énoncé, $\boxed{N_1 = 32 \text{ convient}}$

5. a) $n(n+1)\cdots(n+p)$ est un polynôme en n de degré $p+1$ donc il est équivalent à son terme de plus haut degré : $n(n+1)\cdots(n+p) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{p+1}$.

   Par quotient d'équivalents, $\boxed{u_n(p) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{p+1}}}$

   b) $p \geq 1$ donc $p+1 \geq 2 > 1$ donc la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{p+1}}$ converge.

   Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n(p) \text{ converge aussi.}}$

6. a) Soit $n \geq 1$. $u_n(1) = \frac{1}{n(n+1)}$; or $\frac{1}{n} + \frac{-1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ donc $\boxed{a = 1 \text{ et } b = -1 \text{ conviennent.}}$

   b) $\forall N \geq 1$, $\sum_{n=1}^{N} u_n(1) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{N+1}$ par somme télescopique.

   Et $\lim_{N\to+\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$ donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n(1)$ converge (on le savait déjà) et sa somme vaut

   $$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = 1 = U(1).}$$

7. a) Pour tout couple d'entiers naturels (n, p) tel que $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1) &= \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+1)\ldots(n+p)} \\ &= \frac{(n+p) - n}{n(n+1)\ldots(n+p)} \\ &= \frac{p}{n(n+1)\ldots(n+p)} \\ &= \boxed{p\, u_n(p)} \end{aligned}$$

   b) $\forall N \geq 1$, $p\sum_{n=1}^{N} u_n(p) = \sum_{n=1}^{N} u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1) = u_1(p-1) - u_{N+1}(p-1)$ par somme télescopique.

Et $u_1(p-1) = \dfrac{1}{p!}$; et $\lim\limits_{N\to+\infty} u_{N+1}(p-1) = 0$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(p)$ converge (on le savait déjà) et sa somme vérifie $p\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(p) = \dfrac{1}{p!}$.

$$\boxed{\text{Donc, pour tout entier naturel } p \text{ non nul : } U(p) = \frac{1}{p\times p!}}$$

8. a) Comme il y a deux indices, pour une fois je vous conseille de rédiger de la façon suivante Pour $p \geq 1$, notons P_p la propriété :

« $\forall n \geqslant 1, \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{p!}{n^2(n+1)\dots(n+p)} + \sum\limits_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k)$. »

Montrons par récurrence sur $p \geq 1$ que cette propriété est vraie pour tout $p \geq 1$.

• Initialisation : pour $p = 1$, on a pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^2(n+1)} + \sum_{k=1}^{1}(k-1)!u_n(k) &= \frac{1}{n^2(n+1)} + 0!u_n(1)\\
&= \frac{1}{n^2(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)}\\
&= \frac{n+1}{n^2(n+1)}\\
&= \boxed{\frac{1}{n^2}}
\end{aligned}$$

Donc P_1 est vraie.

• Hérédité :

Supposons que pour un entier $p \geq 1$ on a :

$$\forall n \geqslant 1, \frac{1}{n^2} = \frac{p!}{n^2(n+1)\dots(n+p)} + \sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k).$$

Soit $n \geqslant 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p+1}(k-1)!u_n(k) &= \sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k) + p!u_n(p+1)\\
&\underset{\text{HR}}{=} \frac{1}{n^2} - \frac{p!}{n^2(n+1)\dots(n+p)} + p!u_n(p+1)\\
&= \frac{1}{n^2} + p!\times\frac{-(n+p+1)+n}{n^2(n+1)\dots(n+p)(n+p+1)}\\
&= \frac{1}{n^2} - \frac{(p+1)!}{n^2(n+1)\dots(n+p+1)}
\end{aligned}$$

Donc la propriété est héréditaire.

• Conclusion : la propriété est vraie pour tout $p \geq 1$.

b) Soit $p \geq 1$ fixé.

Pour tout $k \in [\![1;p]\!]$ on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(k) = \dfrac{1}{k\,k!}$

Donc pour tout $k \in [\![1;p]\!]$ on a $(k-1)!\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(k) = \dfrac{1}{k^2}$.

Par somme finie de sommes de séries, on a donc $\sum_{k=1}^{p}(k-1)!\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(k)=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2}$.

Mais puisqu'on a un nombre fini de termes dans la somme,

$\sum_{k=1}^{p}(k-1)!\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(k)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k)$

Et on sait donc que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=S$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k)=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2}$.

Et d'après la question précédente, pour tout entier naturel n non nul :

$p!\times\frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)}=\frac{1}{n^2}-\sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k)$.

Donc la série $\sum_{n\geq 1}p!\times\frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)}$ converge, et sa somme vérifie

$p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n+1)\cdots(n+p)}=S-\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2}$.

Donc

$$\boxed{S=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2}+p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n+1)\cdots(n+p)}.}$$

9. $\forall n\geq 1$ et $\forall p\geq 1$, $0\leq\frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)}\leq\frac{1}{n^{p+2}}$; et la fonction $t\mapsto\frac{1}{t^{p+2}}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Donc pour tout $n\geq 2$, $\forall t\in[n-1;n]\subset]0;+\infty[$, on a $\frac{1}{n^{p+2}}\leq\frac{1}{t^{p+2}}\leq\frac{1}{(n-1)^{p+2}}$. Et la fonction $t\mapsto\frac{1}{t^{p+2}}$ est continue sur $[n-1;n]$. Par croissance de l'intégrale dans le sens croissant des bornes, on a :

$$0\leq\frac{1}{n^{p+2}}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{1}{t^{p+2}}\,dt.$$

Soit $N\geq 1$ fixé. On a donc $N+1\geq 2$.

$\forall M>N$, par sommation des inégalités précédentes et par la relation de Chasles, on a :

$$0\leqslant\sum_{n=N+1}^{M}\frac{1}{n^{p+2}}\leqslant\int_{N}^{M}\frac{\mathrm{d}t}{t^{p+2}}$$

Or $\int_N^M\frac{\mathrm{d}t}{t^{p+2}}=\left[\frac{-1}{p+1}\times\frac{1}{t^{p+1}}\right]_N^M=\frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{N^{p+1}}-\frac{1}{M^{p+1}}\right)$

Donc $\forall M>N\geq 1$, on a :

$$0\leq\sum_{n=N+1}^{M}\frac{1}{n^{p+2}}\leq\frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{N^{p+1}}-\frac{1}{M^{p+1}}\right)$$

Or $\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{N^{p+1}}-\frac{1}{M^{p+1}}\right)=\frac{1}{p+1}\times\frac{1}{N^{p+1}}$ et $\lim_{M\to+\infty}\sum_{n=N+1}^{M}\frac{1}{n^{p+2}}=\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^{p+2}}$ comme reste de série convergente.

Donc par inégalités sur les limites, on a :

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } N\geq 1 : 0\leqslant\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)}\leqslant\frac{1}{p+1}\cdot\frac{1}{N^{p+1}}}$$

10. d'après 8-b), on a pour $p = 3$, $3! = 6$ donc

$$\forall N \geq 1 : |U_N - S| = 6 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)} \leqslant \frac{6}{4} \times \frac{1}{N^4}.$$

Il suffit que $\frac{6}{4} \times \frac{1}{N^4} \leq 10^{-3}$, soit $N^4 \geq 1500$. Ce qui donne, d'après l'erreur d'énoncé détectée, $N_2 = 7$.

11. Le graphique fourni permet de comparer les vitesses de convergence de (S_N), (T_N) et (U_N) vers S : (U_N) converge "plus vite" que (T_N) qui elle même converge "plus vite" que (S_N). Et on trouve pour l'erreur inférieure à 10^{-3} des résultats cohérents avec les valeurs de N_0, N_1 et N_2 données par la théorie.