DS 6 - Variables aléatoires, intégration, séries, applications linéaires.
Version Dure

La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices.
2. Le DS est très long, j'ai laissé l'exercice du DM pour être plus juste avec le sujet plus facile, mais si vous êtes sereins sur ce que vous avez fait, je conseille de **sauter cet exercice.**
3. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
4. Une présentation agréable sera appréciée : laisser une marge à gauche et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Exercice 1 - Questions de cours

1. Que signifie $E \oplus G$? Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce soit le cas, avec démo
2. Rappeler les formules (en citant bien les hypothèses !) des séries géométriques et ses deux dérivées. Redonner la preuve du résultat sur la série géométrique et sur la série géométrique dérivée première.
3. Compléter la phrase suivante et démontrer le résultat : une application linéaire est injective ...

Exercice 2 - Applications linéaires

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (3x - 2y - z, y, 2x - 2y, y + 2t)$$

1. Montrez que f est linéaire.
2. Soit le polynôme $P(x) = x^2 - 3x + 2$. Calculez $P(f)$. (*On rappelle que* $f^2 = f \circ f$)
3. En déduire que f est un automorphisme et donner une expression analytique de f^{-1}.
4. Déterminez pour tout $n \geq 2$ le reste par la division euclidienne de x^n par $P(x)$.
5. En déduire qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que vous préciserez, telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n = a_n f + b_n id_{\mathbb{R}^4}$$
6. En déduire $f^n(e_i)$ où les e_i forment la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3 - Ecricome Maths Appro 2024 1/3 de Sujet

1. Rappeler en fonction du réel α, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$.

   On note alors $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et pour tout entier naturel N non nul : $S_N=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$ et $R_N=\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

2. a) En étudiant la monotonie de la fonction $t\longmapsto\dfrac{1}{t^2}$, montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\leqslant\frac{1}{n^2}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

   b) En déduire que pour tout entier naturel N non nul :

$$\frac{1}{N+1}\leqslant R_N\leqslant\frac{1}{N}$$

3. Déterminer un entier naturel N_0 tel que : $\forall N\geqslant N_0, |S_N-S|\leqslant 10^{-3}$.

4. On pose pour tout entier naturel N non nul : $T_N=S_N+\dfrac{1}{N+1}$.

   a) Montrer que pour tout entier naturel N non nul :

$$|T_N-S|\leqslant\frac{1}{N^2}.$$

   b) Déterminer un entier naturel N_1 strictement inférieur à N_0 tel que $\forall N\geqslant N_1, |T_N-S|\leqslant 10^{-3}$.

   On pose maintenant pour tout couple (n,p) d'entiers naturels non nuls :

$$u_n(p)=\frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}.$$

5. Soit p un entier naturel non nul.

   a) Donner un équivalent simple de $u_n(p)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n(p)$.

   On pose pour tout entier naturel p non nul :

$$U(p)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(p)$$

6. a) Déterminer deux réels a,b vérifiant pour tout entier naturel n non nul : $u_n(1)=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}$.

   b) En déduire la valeur de $U(1)$.

7. a) Exprimer, pour tout couple d'entiers naturels (n,p) tel que $n\geqslant 1$ et $p\geqslant 2, u_n(p-1)-u_{n+1}(p-1)$ en fonction de p et de $u_n(p)$.

   b) Montrer que pour tout entier naturel p non nul : $U(p)=\dfrac{1}{p\times p!}$.

8. a) Montrer, par récurrence sur p, que pour tout entier naturel p non nul, pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{p!}{n^2(n+1)\dots(n+p)} + \sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k)$$

b) En déduire que pour tout entier naturel p non nul : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)}$ converge et

$$S = \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2} + p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n+1)\cdots(n+p)}.$$

9. En reprenant la méthode de la question 2, que l'on appliquera cette fois à la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{p+2}}$, montrer que pour tout couple (N,p) d'entiers naturels non nuls :

$$0 \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)} \leqslant \frac{1}{p+1}\cdot\frac{1}{N^{p+1}}.$$

10. On suppose maintenant que $p=3$. On pose donc pour tout entier naturel N non nul :

$$U_N = \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k^2} + 3!\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{49}{36} + 6\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Déterminer un entier N_2 tel que $\forall N \geqslant N_2, |U_N - S| \leqslant 10^{-3}$.

11. On représente sur la figure 1 l'évolution des erreurs d'approximation de S par S_N, T_N et U_N, respectivement. Commenter ce graphique, à la lumière des réponses apportées aux questions précédentes.

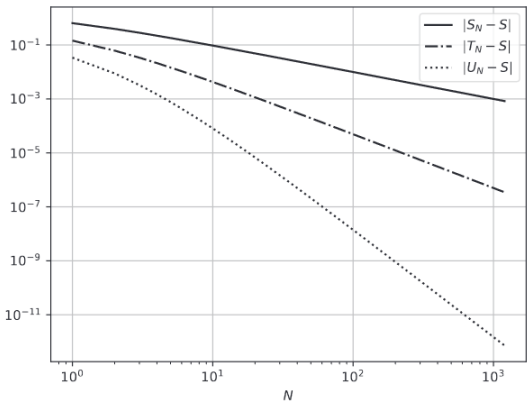


FIGURE 1 – Évolution des erreurs d'approximation de S par S_N, T_N et U_N.

Exercice 4 - Probabilités générales

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On note $p_n = P(A_n)$.

On note $B = \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$.

1. Expliquer pourquoi on a :
$$B = \{\omega \in \Omega,\ \omega \text{ appartient à une infinité des } A_n\}.$$
2. On suppose que la série $\sum_k P(A_k)$ converge. Montrer que $P(B) = 0$.
3. On suppose que les évènements (A_n) sont indépendants, et que la série $\sum_k P(A_k)$ est divergente.
   a) Montrer que l'évènement $\overline{B}$ est égal à $\bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n}\overline{A_k}\right)$.
   b) Exprimer $P\left(\bigcap_{k=n}^{m}\overline{A_k}\right)$ en fonction des p_k.
   c) Montrer que la série $\sum_k \ln(1-p_k)$ est divergente.
   On pourra pour cela discuter des cas $p_k \to 0$ et $p_k \nrightarrow 0$.
   d) En déduire que $P(B) = 1$.

Exercice 5 : Généralisation des séries géométriques

Le but de cet exercice est de généraliser les résultats du théorème sur les séries géométriques dérivées. Pour tout entier naturel r et pour tout réel q appartenant à $]0,1[$, on considère la suite $(S_n(r))_{n\geq r}$ définie par :
$$\forall n \geq r, \quad S_n(r) = \sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r}q^{k-r}.$$

1. **Quelques résultats préliminaires.**
   a) Justifier à l'aide d'un résultat du cours la convergence de la suite $(S_n(r))_{n\geq r}$ dans le cas où r est égal à 0, 1, puis 2. Quelle est sa limite dans chacun de ces cas ?
   b) Pour r fixé, montrer que :
$$\binom{n}{r+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{r+1}}{(r+1)!}.$$
   En déduire la limite.
2. **Étude de la série.**
   a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à $r+1$:
$$(1-q)S_n(r+1) = S_{n-1}(r) - \binom{n}{r+1}q^{n-r}.$$
   b) Montrer par récurrence sur r que $\sum\binom{k}{r}q^{k-r}$ converge, et que :
$$\sum_{k=r}^{+\infty}\binom{k}{r}q^{k-r} = \frac{1}{(1-q)^{r+1}}.$$

Autour des séries - Edhec 2020

Partie 1 : préliminaires (les trois questions sont indépendantes).

1. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

   a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

   b) Utiliser la question précédente pour montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad 0 \leq u_n \leq 1$.

2. Dans cette question, x désigne un réel élément de $[0, 1[$.

   a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0, x]$, simplifier la somme $\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

   b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

   $$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

   c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$.

   d) Établir alors que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente et que : $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$.

3. On considère deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs et on suppose que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes, de somme respectives $A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

   Pour tout entier naturel n non nul, on pose $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$.

   a) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} c_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \leq \sum_{k=1}^{2n} c_k$.

   b) En déduire que la série de terme général c_n converge et que l'on a :

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

   c) Soit x un réel élément de $[0; 1[$. On suppose dans cette question que l'on a $a_k = \frac{x^k}{k}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ et $b_k = x^k$ $(k \in \mathbb{N})$.

      i. Justifier rapidement que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes et à termes positifs.

      ii. Donner l'expression de c_n sous forme d'une somme.

Partie 2 : étude d'une fonction définie comme somme d'une série

Dans cette partie on désigne toujours par x un réel appartenant à $[0,1[$.

4. a) Utiliser la troisième question du préliminaire pour établir que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right).$$

   b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n=\frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

5. a) Montrer que, pour tout réel u strictement positif, on a $\ln(u)\leq u$.
   b) En déduire que la série de terme général $(\ln(n))x^n$, avec $n\geq 1$, est convergente.

6. On pose : $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln(n))x^n$.

   a) Établir, en utilisant le résultat de la question 1b que :

$$\frac{-\ln(1-x)}{1-x}-\frac{x}{1-x}\leq f(x)\leq\frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

   b) Montrer finalement l'équivalent suivant : $f(x)\underset{x\to 1^-}{\sim}\dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

7. a) Étudier les variations de la fonction f.
   b) Dresser le tableau de variations de f (valeur en 0 et limite en 1^- comprises).

8. a) En remarquant que $f(x)=\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(\ln(n))x^n$, montrer que : $0\leq f(x)\leq\dfrac{x}{(1-x)^2}-x$.
   b) En déduire que f est continue à droite en 0 et dérivable à droite 0. Donner la valeur du nombre dérivée à droite en 0 de f.

Probabilités générales - Ecricome 2006

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p\in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q=1-p$.

On va s'intéresser dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté.

On dit que la première série est de longueur $n\geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ème l'autre côté.

De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté.

On définit de même les séries suivantes.

Ω désigne l'ensemble des successions infinies de Pile ou Face.

Pour $i\in\mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement « le i-ème lancer amène Pile » et F_i l'événement contraire.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1 : étude des longueurs de séries

1. On note L_1 la longueur de la première série.
   Exprimer l'événement $(L_1=n)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n+1$. En déduire que : $P(L_1=n)=p^nq+q^np$.
   Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}P(L_1=n)=1$.

2. On note L_2 la longueur de la deuxième série.

   a) Exprimer l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n+k+1$ puis calculer la probabilité de l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$.

   b) En déduire que, pour $k \in \mathbb{N}^*$: $\quad P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}$.

   On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = k) = 1$.

   c) Montrer que la variable aléatoire L_2 admet une espérance égale à 2. *Seulement si vous avez déjà regardé le chapitre suivant.*

Partie 2 : probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

3. Montrer que pour tout réel x, on a $1 - x \leq e^{-x}$.

4. On considère dans cette question une suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'événements indépendants. On suppose que la série de terme général $P(A_i)$ diverge.

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $n \geq k$, on note : $\quad C_n = \displaystyle\bigcup_{k \leq i \leq n} A_i = A_k \cup \cdots \cup A_n$.

   a) Justifier que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty$.

   b) Montrer que $P(C_n) = 1 - \displaystyle\prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i})$, puis, en utilisant la question 3., que :

   $$P(C_n) \geq 1 - \exp\left(- \sum_{i=k}^{n} P(A_i) \right).$$

   En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(C_n) = 1$.

   c) Comparer pour l'inclusion les événements C_n et C_{n+1}. Que peut-on en déduire pour $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i \right)$?

   d) Justifier que : $\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$.

   En déduire que $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \right) = 1$.

5. En considérant les évènements A_n « on obtient Pile au $(2n)$-ème et au $(2n+1)$-ème lancers », montrer que la probabilité d'avoir deux Pile consécutifs après n'importe quel lancer vaut 1.