La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices.
2. Le DS est très long, j'ai laissé l'exercice du DM pour être plus juste avec le sujet plus facile, mais si vous êtes sereins sur ce que vous avez fait, je conseille de **sauter cet exercice.**
3. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
4. Une présentation agréable sera appréciée : laisser une marge à gauche et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Exercice 1 - Questions de cours

1. Que signifie $E \oplus G$? Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce soit le cas, avec démo
2. Rappeler les formules (en citant bien les hypothèses !) des séries géométriques et ses deux dérivées. Redonner la preuve du résultat sur la série géométrique et sur la série géométrique dérivée première.
3. Compléter la phrase suivante et démontrer le résultat : une application linéaire est injective ...

Exercice 2 - Applications linéaires

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (3x - 2y - z, y, 2x - 2y, y + 2t)$$

1. Montrez que f est linéaire.
2. Soit le polynôme $P(x) = x^2 - 3x + 2$. Calculez $P(f)$. (*On rappelle que* $f^2 = f \circ f$)
3. En déduire que f est un automorphisme et donner une expression analytique de f^{-1}.
4. Déterminez pour tout $n \geq 2$ le reste par la division euclidienne de x^n par $P(x)$.
5. En déduire qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que vous préciserez, telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n = a_n f + b_n id_{\mathbb{R}^4}$$
6. En déduire $f^n(e_i)$ où les e_i forment la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

> Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par
>
> $$f(x, y, z, t) = (3x - 2y - z, y, 2x - 2y, y + 2t).$$
>
> 1. **Montrer que f est linéaire.**
> Pour montrer que f est linéaire, il suffit de vérifier que f respecte les deux propriétés suivantes :
> — $f(u + v) = f(u) + f(v)$ pour tous $u, v \in \mathbb{R}^4$.
> — $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^4$.
> Soit $u = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $v = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. On a :
> $$f(u + v) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2).$$
> En appliquant la définition de f, on obtient :
> $$f(u+v) = \big(3(x_1+x_2)-2(y_1+y_2)-(z_1+z_2), y_1+y_2, 2(x_1+x_2)-2(y_1+y_2), (y_1+y_2)+2(t_1+t_2)\big).$$

En développant, cela donne :

$$f(u+v) = \big((3x_1-2y_1-z_1)+(3x_2-2y_2-z_2), y_1+y_2, (2x_1-2y_1)+(2x_2-2y_2), (y_1+2t_1)+(y_2+2t_2)\big).$$

Or, cela correspond à $f(u) + f(v)$. Donc $f(u + v) = f(u) + f(v)$.
De même, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda u) = f(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1, \lambda t_1).$$

En appliquant la définition de f, on obtient :

$$f(\lambda u) = \big(3(\lambda x_1) - 2(\lambda y_1) - (\lambda z_1), \lambda y_1, 2(\lambda x_1) - 2(\lambda y_1), \lambda y_1 + 2(\lambda t_1)\big).$$

Cela donne :

$$f(\lambda u) = \lambda\big(3x_1 - 2y_1 - z_1, y_1, 2x_1 - 2y_1, y_1 + 2t_1\big) = \lambda f(u).$$

Ainsi, f est linéaire.

2. **Calculer $P(f)$ pour $P(x) = x^2 - 3x + 2$.**
On rappelle que $P(f) = f^2 - 3f + 2I$, où $f^2 = f \circ f$ et I est l'identité sur $\mathbb{R}^4$.
Calculons f^2. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$f(x, y, z, t) = (3x - 2y - z, y, 2x - 2y, y + 2t).$$

En appliquant f une seconde fois :

$$\begin{aligned} f^2(x, y, z, t) &= f(3x - 2y - z, y, 2x - 2y, y + 2t) \\ &= \big(3(3x - 2y - z) - 2y - (2x - 2y), y, 2(3x - 2y - z) - 2y, y + 2(y + 2t)\big) \\ &= \big(9x - 6y - 3z - 2y - 2x + 4y, y, 6x - 4y - 2z - 2y, y + 2y + 4t\big) \\ &= \big(7x - 4y - 3z, y, 6x - 6y - 2z, 3y + 4t\big). \end{aligned}$$

Maintenant, calculons $P(f)$:

$$P(f)(x, y, z, t) = f^2(x, y, z, t) - 3f(x, y, z, t) + 2(x, y, z, t).$$

En substituant les expressions de f^2 et f, et en simplifiant, on obtient :

$$\boxed{P(f)(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0).}$$

Donc $P(f) = 0$.

3. **En déduire que f est un automorphisme et donner une expression analytique de f^{-1}.**
Puisque $P(f) = 0$, on a :

$$f^2 - 3f + 2I = 0 \implies f \circ (3I - f) = 2I.$$

Donc f^{-1} existe et :

$$\boxed{f^{-1} = \frac{1}{2}(3I - f).}$$

4. **Déterminer le reste par la division euclidienne de x^n par $P(x)$ pour $n \geq 2$.**
Le polynôme $P(x) = x^2 - 3x + 2$ se factorise en $P(x) = (x - 1)(x - 2)$. Par le théorème de division euclidienne, pour tout $n \geq 2$, il existe des constantes $a, b \in \mathbb{R}$ telles que :

$$x^n = Q(x)P(x) + ax + b,$$

où $Q(x)$ est le quotient. On évaluera x^n en 1 et 2 pour déterminer a et b :

— En évaluant en $x = 1$, on a :

$$1^n = Q(1)P(1) + a(1) + b \implies 1 = 0 + a + b \implies a + b = 1.$$

— En évaluant en $x = 2$, on a :

$$2^n = Q(2)P(2) + a(2) + b \implies 2^n = 0 + 2a + b \implies 2a + b = 2^n.$$

En résolvant le système :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2^n \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 - a \\ 2a + (1 - a) = 2^n \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 - a \\ a + 1 = 2^n \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 - a \\ a = 2^n - 1 \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{x^n = Q(x)P(x) + (2^n - 1)x + (1 - (2^n - 1)) = Q(x)P(x) + (2^n - 1)x + 2 - 2^n.}$$

5. **Exprimer f^n sous la forme $f^n = a_n f + b_n I$.**
En utilisant le résultat précédent, on a :

$$\begin{aligned} f^n &= Q(f)P(f) + (2^n - 1)f + (2 - 2^n)I \\ &= (2^n - 1)f + (2 - 2^n)I \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\boxed{a_n = 2^n - 1 \text{ et } b_n = 2 - 2^n.}$

6. **En déduire $f^n(e_i)$ où les e_i forment la base canonique de $\mathbb{R}^4$.**
Pour calculer $f^n(e_i)$, utilisons la formule précédente : $f^n = a_n f + b_n I$ avec $a_n = 2^n - 1$ et $b_n = 2 - 2^n$.
Calculons d'abord $f(e_i)$ pour chaque vecteur de base :
— $f(e_1) = (3, 0, 2, 0)$
— $f(e_2) = (-2, 1, -2, 1)$
— $f(e_3) = (-1, 0, 0, 0)$
— $f(e_4) = (0, 0, 0, 2)$
Donc, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} f^n(e_1) &= (2^n - 1)(3, 0, 2, 0) + (2 - 2^n)(1, 0, 0, 0) = (3 \cdot 2^n - 3 + 2 - 2^n, 0, 2 \cdot 2^n - 2, 0) \\ f^n(e_2) &= (2^n - 1)(-2, 1, -2, 1) + (2 - 2^n)(0, 1, 0, 0) = (-2 \cdot 2^n + 2, 1, -2 \cdot 2^n + 2, 2^n - 1) \\ f^n(e_3) &= (2^n - 1)(-1, 0, 0, 0) + (2 - 2^n)(0, 0, 1, 0) = (-2^n + 1, 0, 2 - 2^n, 0) \\ f^n(e_4) &= (2^n - 1)(0, 0, 0, 2) + (2 - 2^n)(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 2^n) \end{aligned}$$

La matrice de f^n dans la base canonique est donc :

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2^n + 2 & -2 \cdot 2^n + 2 & -2^n + 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 \cdot 2^n - 2 & -2 \cdot 2^n + 2 & 2 - 2^n & 0 \\ 0 & 2^n - 1 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 3 - Ecricome Maths Appro 2024 1/3 de Sujet

1. Rappeler en fonction du réel α, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$.

   On note alors $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et pour tout entier naturel N non nul : $S_N=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$ et $R_N=\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

2. a) En étudiant la monotonie de la fonction $t\longmapsto\dfrac{1}{t^2}$, montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :
   $$\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\leqslant\frac{1}{n^2}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

   b) En déduire que pour tout entier naturel N non nul :
   $$\frac{1}{N+1}\leqslant R_N\leqslant\frac{1}{N}$$

3. Déterminer un entier naturel N_0 tel que : $\forall N\geqslant N_0, |S_N-S|\leqslant 10^{-3}$.

4. On pose pour tout entier naturel N non nul : $T_N=S_N+\dfrac{1}{N+1}$.

   a) Montrer que pour tout entier naturel N non nul :
   $$|T_N-S|\leqslant\frac{1}{N^2}.$$

   b) Déterminer un entier naturel N_1 strictement inférieur à N_0 tel que $\forall N\geqslant N_1, |T_N-S|\leqslant 10^{-3}$.

   On pose maintenant pour tout couple (n,p) d'entiers naturels non nuls :
   $$u_n(p)=\frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}.$$

5. Soit p un entier naturel non nul.

   a) Donner un équivalent simple de $u_n(p)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n(p)$.

   On pose pour tout entier naturel p non nul :
   $$U(p)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(p)$$

6. a) Déterminer deux réels a,b vérifiant pour tout entier naturel n non nul : $u_n(1)=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}$.

   b) En déduire la valeur de $U(1)$.

7. a) Exprimer, pour tout couple d'entiers naturels (n,p) tel que $n\geqslant 1$ et $p\geqslant 2, u_n(p-1)-u_{n+1}(p-1)$ en fonction de p et de $u_n(p)$.

   b) Montrer que pour tout entier naturel p non nul : $U(p)=\dfrac{1}{p\times p!}$.

8. a) Montrer, par récurrence sur p, que pour tout entier naturel p non nul, pour tout entier naturel n non nul :
   $$\frac{1}{n^2}=\frac{p!}{n^2(n+1)\dots(n+p)}+\sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k)$$

b) En déduire que pour tout entier naturel p non nul : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)}$ converge et

$$S=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2}+p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n+1)\cdots(n+p)}.$$

9. En reprenant la méthode de la question 2, que l'on appliquera cette fois à la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{x^{p+2}}$, montrer que pour tout couple (N,p) d'entiers naturels non nuls :

$$0\leqslant\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)}\leqslant\frac{1}{p+1}\cdot\frac{1}{N^{p+1}}.$$

10. On suppose maintenant que $p=3$. On pose donc pour tout entier naturel N non nul :

$$U_N=\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k^2}+3!\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{49}{36}+6\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Déterminer un entier N_2 tel que $\forall N\geqslant N_2, |U_N-S|\leqslant 10^{-3}$.

11. On représente sur la figure 1 l'évolution des erreurs d'approximation de S par S_N, T_N et U_N, respectivement. Commenter ce graphique, à la lumière des réponses apportées aux questions précédentes.

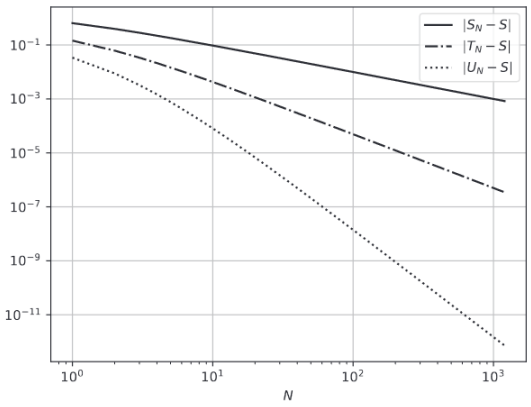


FIGURE 1 – Évolution des erreurs d'approximation de S par S_N, T_N et U_N.

À toutes fins utiles, on donne $31^2=961$, $32^2=1024$, $3^4=81$ et $4^4=256$. *erreur du sujet : il aurait fallu donner les valeurs* $6^4=1296$ *et* $7^4=2401$.

1. La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha>1$.

2. a) La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^2}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ car dérivable de dérivée $t\mapsto-\dfrac{2}{t^3}<0$.
Donc pour tout $n\geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}&n\leq t\leq n+1\\ \Leftrightarrow&\frac{1}{(n+1)^2}\leq\frac{1}{t^2}\leq\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

Et la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^2}$ est continue sur $[n;n+1]$. Par croissance de l'intégrale dans le

sens croissant des bornes, on a :

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

En regardant ce résultat avec $n-1$ au lieu de n, on a aussi

$$\frac{1}{n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^2}\,dt \leq \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Conclusion : pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$

b) Soit $N \geq 1$ fixé. On a donc $N+1 \geq 2$.
$\forall M > N$, par sommation des inégalités précédentes et par la relation de Chasles, on a :

$$\int_{N+1}^{M+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n^2} \leqslant \int_N^M \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

Or $\displaystyle\int_{N+1}^{M+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[\frac{-1}{t}\right]_{N+1}^{M+1} = \frac{1}{N+1} - \frac{1}{M+1}$ et de même, $\displaystyle\int_N^M \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[\frac{-1}{t}\right]_N^M = \frac{1}{N} - \frac{1}{M}$
Donc $\forall M > N \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{N+1} - \frac{1}{M+1} \leq \sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N} - \frac{1}{M}$$

Or $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{N+1} - \frac{1}{M+1} = \frac{1}{N+1}$ et $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{N} - \frac{1}{M} = \frac{1}{N}$ et $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n^2} = R_N$ comme reste de série convergente.
Donc par inégalités sur les limites, on a :

pour tout entier naturel $N \geq 1$: $\displaystyle\frac{1}{N+1} \leqslant R_N \leqslant \frac{1}{N}$

3. $|S_N - S| = |-R_N| = R_N \leqslant \dfrac{1}{N}$ d'après la question précédente.

Il suffit que $\dfrac{1}{N} \leq 10^{-3}$ pour avoir ce que l'on souhaite, donc que $N \geq 10^3$. $N_0 = 1000$ convient

4. a) Soit $N \geq 1$ fixé. On a $|T_N - S| = |S - T_N| = \left|R_N - \dfrac{1}{N+1}\right|$.

Or $\dfrac{1}{N+1} \leqslant R_N \leqslant \dfrac{1}{N}$ donc $0 \leqslant R_N - \dfrac{1}{N+1} \leqslant \dfrac{1}{N} - \dfrac{1}{N+1}$, et $\dfrac{1}{N} - \dfrac{1}{N+1} = \dfrac{1}{N(N+1)} \leq \dfrac{1}{N^2}$.

pour tout entier naturel $N \geq 1$: $\displaystyle|T_N - S| \leqslant \frac{1}{N^2}$

b) Il suffit que $\dfrac{1}{N^2} \leq 10^{-3}$ pour avoir ce que l'on souhaite, donc que $N^2 \geq 10^3$. D'après les données numériques de l'énoncé, $N_1 = 32$ convient

5. a) $n(n+1)\cdots(n+p)$ est un polynôme en n de degré $p+1$ donc il est équivalent à son terme de plus haut degré : $n(n+1)\cdots(n+p) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{p+1}$.

   Par quotient d'équivalents, $\boxed{u_n(p) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{p+1}}}$

   b) $p \geq 1$ donc $p+1 \geq 2 > 1$ donc la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{p+1}}$ converge.

   Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n(p) \text{ converge aussi.}}$

6. a) Soit $n \geq 1$. $u_n(1) = \frac{1}{n(n+1)}$; or $\frac{1}{n} + \frac{-1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ donc $\boxed{a=1 \text{ et } b=-1 \text{ conviennent.}}$

   b) $\forall N \geq 1$, $\sum_{n=1}^{N} u_n(1) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{N+1}$ par somme télescopique.

   Et $\lim_{N\to+\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$ donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n(1)$ converge (on le savait déjà) et sa somme vaut

   $$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = 1 = U(1).}$$

7. a) Pour tout couple d'entiers naturels (n,p) tel que $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1) &= \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+1)\dots(n+p)} \\ &= \frac{(n+p)-n}{n(n+1)\dots(n+p)} \\ &= \frac{p}{n(n+1)\dots(n+p)} \\ &= \boxed{p\,u_n(p)} \end{aligned}$$

   b) $\forall N \geq 1$, $p\sum_{n=1}^{N} u_n(p) = \sum_{n=1}^{N} u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1) = u_1(p-1) - u_{N+1}(p-1)$ par somme télescopique.

   Et $u_1(p-1) = \frac{1}{p!}$; et $\lim_{N\to+\infty} u_{N+1}(p-1) = 0$ donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n(p)$ converge (on le savait déjà) et sa somme vérifie $p\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(p) = \frac{1}{p!}$.

   $$\boxed{\text{Donc, pour tout entier naturel } p \text{ non nul : } U(p) = \frac{1}{p \times p!}}$$

8. a) Comme il y a deux indices, pour une fois je vous conseille de rédiger de la façon suivante Pour $p \geq 1$, notons P_p la propriété :

   « $\forall n \geqslant 1, \frac{1}{n^2} = \frac{p!}{n^2(n+1)\dots(n+p)} + \sum_{k=1}^{p} (k-1)!u_n(k)$. »

   Montrons par récurrence sur $p \geq 1$ que cette propriété est vraie pour tout $p \geq 1$.

   • Initialisation : pour $p=1$, on a pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2(n+1)}+\sum_{k=1}^{1}(k-1)!u_n(k) &= \frac{1}{n^2(n+1)}+0!u_n(1)\\ &= \frac{1}{n^2(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)}\\ &= \frac{n+1}{n^2(n+1)}\\ &= \boxed{\frac{1}{n^2}}\end{aligned}$$

Donc P_1 est vraie.

• Hérédité :

Supposons que pour un entier $p \geq 1$ on a :

$$\forall n \geqslant 1, \frac{1}{n^2} = \frac{p!}{n^2(n+1)\dots(n+p)} + \sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k).$$

Soit $n \geqslant 1$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p+1}(k-1)!u_n(k) &= \sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k)+p!u_n(p+1)\\ &\underset{\text{HR}}{=} \frac{1}{n^2}-\frac{p!}{n^2(n+1)\dots(n+p)}+p!u_n(p+1)\\ &= \frac{1}{n^2}+p!\times\frac{-(n+p+1)+n}{n^2(n+1)\dots(n+p)(n+p+1)}\\ &= \frac{1}{n^2}-\frac{(p+1)!}{n^2(n+1)\dots(n+p+1)}\end{aligned}$$

Donc la propriété est héréditaire.

• Conclusion : la propriété est vraie pour tout $p \geq 1$.

b) Soit $p \geq 1$ fixé.

Pour tout $k \in [\![1;p]\!]$ on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(k) = \frac{1}{k\,k!}$

Donc pour tout $k \in [\![1;p]\!]$ on a $(k-1)!\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(k) = \frac{1}{k^2}$.

Par somme finie de sommes de séries, on a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(k-1)!\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(k) = \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2}$.

Mais puisqu'on a un nombre fini de termes dans la somme,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(k-1)!\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(k) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k)$

Et on sait donc que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = S$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k) = \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2}$.

Et d'après la question précédente, pour tout entier naturel n non nul :

$$p!\times\frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)} = \frac{1}{n^2}-\sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k).$$

Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} p! \times \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)}$ converge, et sa somme vérifie

$$p!\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\cdots(n+p)} = S - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2}.$$

Donc

$$\boxed{S = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} + p!\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\cdots(n+p)}.}$$

9. $\forall n \geq 1$ et $\forall p \geq 1$, $0 \leq \dfrac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)} \leq \dfrac{1}{n^{p+2}}$; et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{p+2}}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

   Donc pour tout $n \geq 2$, $\forall t \in [n-1;n] \subset]0;+\infty[$, on a $\dfrac{1}{n^{p+2}} \leq \dfrac{1}{t^{p+2}} \leq \dfrac{1}{(n-1)^{p+2}}$. Et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{p+2}}$ est continue sur $[n-1;n]$. Par croissance de l'intégrale dans le sens croissant des bornes, on a :

$$0 \leq \frac{1}{n^{p+2}} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^{p+2}}\, dt.$$

   Soit $N \geq 1$ fixé. On a donc $N+1 \geq 2$.
   $\forall M > N$, par sommation des inégalités précédentes et par la relation de Chasles, on a :

$$0 \leqslant \sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n^{p+2}} \leqslant \int_{N}^{M} \frac{\mathrm{d}t}{t^{p+2}}$$

   Or $\displaystyle\int_N^M \frac{\mathrm{d}t}{t^{p+2}} = \left[\frac{-1}{p+1} \times \frac{1}{t^{p+1}}\right]_N^M = \frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{N^{p+1}} - \frac{1}{M^{p+1}}\right)$
   Donc $\forall M > N \geq 1$, on a :

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n^{p+2}} \leq \frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{N^{p+1}} - \frac{1}{M^{p+1}}\right)$$

   Or $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{N^{p+1}} - \frac{1}{M^{p+1}}\right) = \frac{1}{p+1} \times \frac{1}{N^{p+1}}$ et $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n^{p+2}} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+2}}$ comme reste de série convergente.
   Donc par inégalités sur les limites, on a :

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } N \geq 1 : 0 \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)} \leqslant \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{N^{p+1}}}$$

10. d'après 8-b), on a pour $p = 3$, $3! = 6$ donc
    $\forall N \geq 1 : |U_N - S| = 6 \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)} \leqslant \frac{6}{4} \times \frac{1}{N^4}.$
    Il suffit que $\dfrac{6}{4} \times \dfrac{1}{N^4} \leq 10^{-3}$, soit $N^4 \geq 1500$. Ce qui donne, d'après l'erreur d'énoncé détectée, $N_2 = 7$.
11. Le graphique fourni permet de comparer les vitesses de convergence de (S_N), (T_N) et (U_N) vers S : (U_N) converge "plus vite" que (T_N) qui elle même converge "plus vite" que (S_N).
    Et on trouve pour l'erreur inférieure à 10^{-3} des résultats cohérents avec les valeurs de N_0, N_1 et N_2 données par la théorie.

Exercice 4 - Probabilités générales

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On note $p_n = P(A_n)$.

On note $B = \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$.

1. Expliquer pourquoi on a :
$$B = \{\omega \in \Omega,\ \omega \text{ appartient à une infinité des } A_n\}.$$
2. On suppose que la série $\sum_k P(A_k)$ converge. Montrer que $P(B) = 0$.
3. On suppose que les évènements (A_n) sont indépendants, et que la série $\sum_k P(A_k)$ est divergente.
   a) Montrer que l'évènement $\overline{B}$ est égal à $\bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n}\overline{A_k}\right)$.
   b) Exprimer $P\left(\bigcap_{k=n}^{m}\overline{A_k}\right)$ en fonction des p_k.
   c) Montrer que la série $\sum_k \ln(1-p_k)$ est divergente.
   On pourra pour cela discuter des cas $p_k \to 0$ et $p_k \nrightarrow 0$.
   d) En déduire que $P(B) = 1$.

1. L'évènement $\bigcup_{k\geq n} A_k$ correspond aux éléments ω qui appartiennent à au moins un A_k avec $k \geq n$.
   Donc $\bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$ correspond aux éléments ω qui, pour tout $n \geq 1$, appartiennent à au moins un A_k avec $k \geq n$.
   Autrement dit, quel que soit le rang n choisi, ω appartient encore à au moins un A_k de rang supérieur à n. Cela signifie exactement que ω appartient à une infinité de A_k.
2. On utilise la limite monotone : la suite $\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)_{n\geq 1}$ est décroissante, donc :
$$0 \leq P(B) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k).$$
   Car comme la série $\sum P(A_k)$ converge, $\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$ existe et $\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
   Donc $\boxed{P(B) = 0.}$
3. a) Par les lois de Morgan généralisées, on a
$$\overline{B} = \overline{\bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)} = \bigcup_{n\geq 1}\overline{\bigcup_{k\geq n} A_k} = \bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n}\overline{A_k}\right).$$
   b) Par indépendance des évènements :
$$P\left(\bigcap_{k=n}^{m}\overline{A_k}\right) = \prod_{k=n}^{m} P(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^{m}(1-p_k).$$

c) Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, alors $(\ln(1-p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 (sinon en passant à l'exponentielle on aurait $\lim 1-p_n = 1$ par continuité). Donc la série diverge grossièrement.
Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors on a :

$$\ln(1-p_k) \sim -p_k$$

Or $\sum p_k$ diverge, donc $\sum \ln(1-p_k)$ diverge vers $-\infty$ par comparaison des séries à termes constants.

d) On utilise encore la limite monotone, deux fois. D'abord : $P\left(\bigcap_{k\geq n} \overline{A_k}\right) = \lim_{m\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right) = \lim_{m\to+\infty} \prod_{k=n}^{m}(1-p_k) = \lim_{m\to+\infty} \exp\left(\sum_{k=n}^{m} \ln(1-p_k)\right) = 0$
Encore une limite monotone mais cette fois-ci avec

$$P(\overline{B}) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k\geq n} \overline{A_k}\right) = 0$$

Exercice 5 : Généralisation des séries géométriques

Le but de cet exercice est de généraliser les résultats du théorème sur les séries géométriques dérivées. Pour tout entier naturel r et pour tout réel q appartenant à $]0,1[$, on considère la suite $(S_n(r))_{n\geq r}$ définie par :

$$\forall n \geq r, \quad S_n(r) = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} q^{k-r}.$$

1. **Quelques résultats préliminaires.**
   a) Justifier à l'aide d'un résultat du cours la convergence de la suite $(S_n(r))_{n\geq r}$ dans le cas où r est égal à 0, 1, puis 2. Quelle est sa limite dans chacun de ces cas ?
   b) Pour r fixé, montrer que :
   $$\binom{n}{r+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{r+1}}{(r+1)!}.$$
   En déduire la limite.
2. **Étude de la série.**
   a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à $r+1$:
   $$(1-q)S_n(r+1) = S_{n-1}(r) - \binom{n}{r+1} q^{n-r}.$$
   b) Montrer par récurrence sur r que $\sum \binom{k}{r} q^{k-r}$ converge, et que :
   $$\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} q^{k-r} = \frac{1}{(1-q)^{r+1}}.$$

Effectué en classe. Je la mettrai dès que j'aurai eu le temps de l'écrire au propre

Autour des séries - Edhec 2020

Partie 1 : préliminaires (les trois questions sont indépendantes).

1. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

   a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

   b) Utiliser la question précédente pour montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad 0 \leq u_n \leq 1$.

2. Dans cette question, x désigne un réel élément de $[0, 1[$.

   a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0, x]$, simplifier la somme $\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

   b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

   $$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

   c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$.

   d) Établir alors que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente et que : $\quad \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$.

3. On considère deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs et on suppose que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes, de somme respectives $A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

   Pour tout entier naturel n non nul, on pose $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$.

   a) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} c_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \leq \sum_{k=1}^{2n} c_k$.

   b) En déduire que la série de terme général c_n converge et que l'on a :

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

   c) Soit x un réel élément de $[0; 1[$. On suppose dans cette question que l'on a $a_k = \frac{x^k}{k}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ et $b_k = x^k$ $(k \in \mathbb{N})$.

      i. Justifier rapidement que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes et à termes positifs.

      ii. Donner l'expression de c_n sous forme d'une somme.

Partie 2 : étude d'une fonction définie comme somme d'une série

Dans cette partie on désigne toujours par x un réel appartenant à $[0, 1[$.

4. a) Utiliser la troisième question du préliminaire pour établir que :

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right).$$

   b) En déduire que : $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

5. a) Montrer que, pour tout réel u strictement positif, on a $\ln(u) \leq u$.
   b) En déduire que la série de terme général $(\ln(n))x^n$, avec $n \geq 1$, est convergente.

6. On pose : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln(n))x^n$.
   a) Établir, en utilisant le résultat de la question 1b que :
   $$\frac{-\ln(1-x)}{1-x} - \frac{x}{1-x} \leq f(x) \leq \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$
   b) Montrer finalement l'équivalent suivant : $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

7. a) Étudier les variations de la fonction f.
   b) Dresser le tableau de variations de f (valeur en 0 et limite en 1^- comprises).

8. a) En remarquant que $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (\ln(n))x^n$, montrer que : $0 \leq f(x) \leq \frac{x}{(1-x)^2} - x$.
   b) En déduire que f est continue à droite en 0 et dérivable à droite 0. Donner la valeur du nombre dérivée à droite en 0 de f.

Partie 1 : préliminaires (les trois questions sont indépendantes)

1. a) Proposons deux méthodes pour cette question.

Méthode 1. Par l'inégalité des accroissements finis.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f = \ln$ est continue sur l'intervalle $[k, k+1]$, dérivable sur $]k, k+1[$ et on a :

$$\forall t \in]k, k+1[, \qquad \frac{1}{k+1} \leq f'(t) = \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

L'inégalité des accroissements finis nous assure alors que :

$$\boxed{\frac{1}{k} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}}$$

Méthode 2. Par encadrement d'une intégrale.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[k, k+1]$, d'où :

$$\forall t \in [k, k+1], \qquad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt,$$

soit encore :

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.}$$

   b) En sommant les inégalités précédentes pour $k = 1, \ldots, n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) - \ln(1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

D'où :

$$-1 \leq \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq -\frac{1}{n}.$$

Ce qui se récrit :

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq 1}$$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, x]$. Calculons :

$$\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \sum_{p=0}^{n-1} t^p \underbrace{=}_{t \neq 1} 1 \cdot \frac{1 - t^n}{1 - t}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, x], \qquad \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \frac{1 - t^n}{1 - t}}$$

b) On intègre l'égalité de la question précédente entre 0 et x :

$$\int_0^x \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} \, \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1 - t^n}{1 - t} \mathrm{d}t$$

Or, par linéarité de l'intégrale (sur un segment) :

$$\int_0^x \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} \, \mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{n} \int_0^x t^{p-1} \, \mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p}.$$

Également par linéarité de l'intégrale (sur un segment) :

$$\int_0^x \frac{1 - t^n}{1 - t} \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1 - t} \mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} \mathrm{d}t = -\ln(1 - x) - \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} \, \mathrm{d}t.$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1 - x) - \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} \, \mathrm{d}t.}$$

c) Pour tout $t \in [0, x[$ (où $x \in [0, 1[$ est fixé), on a $1 - x < 1 - t$, de sorte que :

$$\forall t \in [0, x[, \qquad 0 \leq \frac{t^n}{1 - t} \leq \frac{t^n}{1 - x}$$

On en déduit, en intégrant sur le segment $[0, x]$:

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{1 - x} \frac{x^{n+1}}{n + 1}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1 - x} \dfrac{x^{n+1}}{n + 1} = 0$. Et d'après le théorème des gendarmes, on peut conclure que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1 - t} \, \mathrm{d}t \text{ existe et vaut } 0.}$

d) D'après la question 2.(b) et la question 2.(c) :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(1-x).$$

Donc $\boxed{\text{la série de terme général } \frac{x^p}{p} \text{ est convergente}}$ et $\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x).}$

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} c_k &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} a_i b_{k-i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(a_i \sum_{k=i}^{n} b_{k-i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i \sum_{j=0}^{n-i} b_j\right)\end{aligned}$$

Comme les suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont à termes positifs, il suit :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad a_i \sum_{j=0}^{n-i} b_j \leqslant a_i \sum_{j=0}^{n} b_j$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n} b_j \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right)$$

En reprenant les calculs faits plus haut (en remplaçant n par $2n$), on obtient :

$$\sum_{k=1}^{2n} c_k = \sum_{i=1}^{2n}\left(a_i \sum_{j=0}^{2n-i} b_j\right).$$

Là encore, comme les suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont à termes positifs, il suit :

$$\sum_{k=1}^{2n} c_k \geq \sum_{i=1}^{n}\left(a_i \sum_{j=0}^{2n-i} b_j\right).$$

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $2n-i \geq n$ et donc :

$$a_i \sum_{j=0}^{2n-i} b_j \geq a_i \sum_{j=0}^{n} b_j.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \geq \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right).$$

Finalement, on obtient que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} c_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \leq \sum_{k=1}^{2n} c_k.}$$

Autre méthode. Disposons les réels a_k et b_ℓ dans un tableau comme suit.

	$\ell=0$	$\ell=1$	$\cdots$	$\ell=n-1$	$\ell=n$	$\ldots$	$\ell=2n-1$	$\ldots$
$k=1$	a_1b_0	a_1b_1	$\cdots$	a_1b_{n-1}	a_1b_n	$\ldots$	a_1b_{2n-1}	
$k=2$	a_2b_0	a_2b_1	$\cdots$	a_2b_{n-1}	a_2b_n	$\ldots$	a_2b_{2n-1}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$k=n$	a_nb_0	a_nb_1	$\cdots$	a_nb_{n-1}	a_nb_n	$\ldots$	a_nb_{2n-1}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$						
$k=2n$	$a_{2n}b_0$	$a_{2n}b_1$						
$\vdots$								

La somme des termes en bleu est précisément $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k$, celle des termes en bleu et en vert est $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell\right)$, et celle des termes en bleu, en vert et en rouge est $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} c_k$.
Comme tous les réels a_k et b_ℓ sont positifs, il suit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} c_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \leq \sum_{k=1}^{2n} c_k.}$$

b) Les séries de terme général a_n et b_n sont à termes positifs et convergent. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq A, \qquad \text{et} \qquad 0 \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq B.$$

À l'aide de la première inégalité de la question précédente, il suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=1}^{n} c_k \leq AB.$$

La série de terme général $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, et la suite de ses sommes partielles est majorée. Par le cours, $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 1} c_n \text{ converge donc.}}$

En passant à la limite dans les inégalités obtenues à la question précédente (tout converge), on obtient :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \leq AB \leq \sum_{k=1}^{+\infty} c_k, \qquad \text{et donc} \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).}$$

c) i. Puisque $x \geq 0$, les séries de termes généraux a_n et b_n sont à termes positifs.

Comme $x \in [0,1[$ la série de terme général b_n est une série géométrique de raison appartenant à $]-1,1[$, elle converge donc.

On a montré à la question 2.(d) que la série de terme général a_n converge et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = -\ln(1-x)$.

Finalement, $\boxed{\text{les séries } \sum a_n \text{ et } \sum b_n \text{ sont à termes positifs et convergentes.}}$

ii. Calculons pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \cdot x^{n-k} \boxed{= x^n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.}$$

Partie 2 : étude d'une fonction définie comme somme d'une série

4. a) Pour $x \in [0,1[$, en prenant les suites définies à la question 3.(c), on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) \boxed{= \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right).}$$

b) On sait d'après la partie 1 et le cours que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}}$$

5. a) La fonction $f : u \mapsto \ln(u)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et satisfait $f''(u) = -\dfrac{1}{u^2} \leq 0$ pour tout $u > 0$. f est donc concave sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\mathscr{C}_f$ est en dessous de toutes ses tangentes. En particulier, elle est en dessous de sa tangente en 1 qui a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1) = x - 1$. Par conséquent :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(u) \leq u - 1 \leq u$$

Ainsi : $\boxed{\forall u \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(u) \leq u.}$

b) Rappelons que $x \in [0,1[$ est fixé. Alors :

— pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq (\ln(n))x^n \leq nx^n = x \times (nx^{n-1})$;

— la série de terme général nx^n est convergente en tant que série géométrique dérivée de raison appartenant à $]-1,1[$.

Par théorème de comparaison, $\boxed{\text{la série } \sum(\ln(n))x^n \text{ est convergente.}}$

6. On pose : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln(n))x^n$.

a) On a vu à la question 1.(c) que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) \leq 1.$$

On en déduit l'encadrement suivant :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

D'où, en multipliant par $x^n \geq 0$:

$$x^n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - x^n \leqslant \ln(n)x^n \leqslant x^n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Il a déjà été démontré que tous les termes de cette inégalité sont les termes généraux de séries convergentes, on peut donc sommer ces inégalités pour tout $n \geq 1$ (tout converge). On obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(x^n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)-\sum_{n=1}^{+\infty}x^n \leqslant f(x) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\left(x^n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$$

D'où, en exploitant le résultat de la question 4.(b) :

$$\boxed{\frac{-\ln(1-x)}{1-x}-\frac{x}{1-x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{-\ln(1-x)}{1-x}}$$

b) Pour $x \in [0,1[$, on a $\dfrac{-\ln(1-x)}{1-x} > 0$. En quotientant l'inégalité de la question précédente par $\dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$, on obtient :

$$1+\frac{x}{\ln(1-x)} \leqslant \frac{f(x)}{\frac{-\ln(1-x)}{1-x}} \leqslant 1$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 1^-} 1+\dfrac{x}{\ln(1-x)} = 1$, on obtient par le théorème de gendarmes que $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)}{\frac{-\ln(1-x)}{1-x}}$ existe et vaut 1. Ainsi :

$$\boxed{f(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}}$$

7. a) Soit $(x,y) \in [0,1[^2$ avec $x \leq y$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(n)x^n \leq \ln(n)y^n.$$

D'où, en sommant (tout converge) :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)y^n = f(y).$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est croissante sur } [0,1[.}$

Remarque f étant définie par une somme **infinie**, il n'est pas du tout clair que f soit dérivable, ni même continue. Pour montrer que f est croissante, on ne peut donc pas dériver f. Il faut donc le faire « à la main » en prenant $x \leq y$ et en montrant que $f(x) \leq f(y)$.

b) Remarquons que $f(0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln(n)\times 0 = 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-\ln(1-x)}{1-x} = +\infty$. Par équivalence, il suit que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$. On obtient le tableau de variations suivant.

x	0		1
f	0	↗	$+\infty$

8. a) Tout d'abord, d'après l'étude de variations précédentes, on a pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) \geq 0$. D'autre part :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln(n))x^n = \ln(1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} (\ln(n))x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} (\ln(n))x^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(n) \leq n$, et donc $\ln(n)x^n \leq nx^n$ car $x \geq 0$. Or ce sont des termes généraux de séries convergentes. D'où en sommant (tout converge) :

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (\ln(n))x^n \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} nx^n$$

Or :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n - x = x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} - x = \frac{x}{(1-x)^2} - x$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in [0,1[, \qquad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{(1-x)^2} - x}$$

b) Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{(1-x)^2} - x = 0$, il suit par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ existe et vaut $0 = f(0)$. Donc $\boxed{f \text{ est continue à droite en } 0.}$

Pour $x \neq 0$, on obtient à l'aide de l'inégalité obtenue à la question précédente :

$$0 \leq \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \frac{1}{(1-x)^2} - 1$$

Or $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{(1-x)^2} - 1 = 0$. Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ existe et vaut 0. Donc $\boxed{f \text{ est dérivable à droite en } 0 \text{ et } f'_d(0) = 0.}$

Probabilités générales - Ecricome 2006

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On va s'intéresser dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté.

On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ème l'autre côté.

De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté.

On définit de même les séries suivantes.

Ω désigne l'ensemble des successions infinies de Pile ou Face.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement « le i-ème lancer amène Pile » et F_i l'événement contraire.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1 : étude des longueurs de séries

1. On note L_1 la longueur de la première série.
   Exprimer l'événement $(L_1 = n)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n+1$. En déduire que : $P(L_1 = n) = p^n q + q^n p$.
   Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = 1$.
2. On note L_2 la longueur de la deuxième série.
   a) Exprimer l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n + k + 1$ puis calculer la probabilité de l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$.
   b) En déduire que, pour $k \in \mathbb{N}^*$: $P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}$.
   On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = k) = 1$.
   c) Montrer que la variable aléatoire L_2 admet une espérance égale à 2. *Seulement si vous avez déjà regardé le chapitre suivant.*

Partie 2 : probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

3. Montrer que pour tout réel x, on a $1 - x \leq e^{-x}$.
4. On considère dans cette question une suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'événements indépendants. On suppose que la série de terme général $P(A_i)$ diverge.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $n \geq k$, on note : $C_n = \displaystyle\bigcup_{k \leq i \leq n} A_i = A_k \cup \cdots \cup A_n$.
   a) Justifier que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty$.
   b) Montrer que $P(C_n) = 1 - \displaystyle\prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i})$, puis, en utilisant la question 3., que :
   $$P(C_n) \geq 1 - \exp\left(- \sum_{i=k}^{n} P(A_i) \right).$$
   En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(C_n) = 1$.
   c) Comparer pour l'inclusion les événements C_n et C_{n+1}. Que peut-on en déduire pour $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i \right)$?

d) Justifier que : $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$.

En déduire que $P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1$.

5. En considérant les évènements A_n « on obtient Pile au $(2n)$-ème et au $(2n+1)$-ème lancers », montrer que la probabilité d'avoir deux Pile consécutifs après n'importe quel lancer vaut 1.

Partie 1 : étude des longueurs de séries

1. L'évènement $(L_1 = n)$ est réalisé si, et seulement si, on fait n Piles suivi d'un Face ou si on fait n Faces suivi d'un Pile. D'où l'égalité d'évènements :

$$\boxed{(L_1 = n) = (P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}) \bigcup (F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1})\,.}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} P(L_1 = n) &= P\left((P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}) \bigcup (F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1})\right) \\ &= P\left(P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}\right) + P\left(F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1}\right) \quad \text{par incomp. des évènements} \\ &= P(P_1)\ldots P(P_n)P(F_{n+1}) + P(F_1)\ldots P(F_n)P(P_{n+1}) \quad \text{par indép. des lancers} \\ &\boxed{= p^n q + q^n p} \end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geq 1} P(L_1 = n)$ converge par σ-additivité d'une probabilité (les évènements sont incompatibles), et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (p^n q + q^n p)$$

On reconnait ici les termes généraux de deux séries géométriques de raisons p et q toutes deux dans $]-1, 1[$. Elles convergent donc. On obtient par linéarité de la somme (tout converge) que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^n q + \sum_{n=1}^{+\infty} q^n p = q\frac{p}{1-p} + p\frac{q}{1-q} = p + q \boxed{= 1}$$

Remarque. On vient ainsi de montrer que la famille d'évènements $((L_1 = n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système presque complet d'évènements.

2. On note L_2 la longueur de la deuxième série.

   a) L'évènement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$ est réalisé si, et seulement si, les n premiers lancers donnent Pile, les k suivant donnent Face, et le $n+k+1$ donne pile ou l'inverse (n Faces, puis k Piles, puis un Pile). Ce qui donne :

$$\boxed{(L_1 = n) \cap (L_2 = k) = (P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1} \cap \cdots \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}) \bigcup (F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap \cdots \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1})}$$

En utilisant encore une fois l'incompatibilité des évènements, puis l'indépendance des lancers, on obtient :

$$\begin{aligned} P((L_1 = n) \cap (L_2 = k)) &= P\left(P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1} \cap \cdots \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}\right) \\ &\quad + P\left(F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap \cdots \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1}\right) \\ &= p^n q^k p + q^n p^k q \boxed{= p^{n+1}q^k + q^{n+1}p^k.} \end{aligned}$$

b) Par la formule des probabilités totales appliquée avec le SPCE $((L_1 = n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, on obtient que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(L_2 = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((L_1 = n) \cap (L_2 = k)) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n+1}q^k + q^{n+1}p^k$$

On reconnait là encore deux séries géométriques de raisons appartenant à $]-1, 1[$. Tout converge donc, et on peut appliquer la linéarité de la somme. On obtient (sans oublier le premier terme dans les sommes des séries géométriques) :

$$P(L_2 = k) = q^k \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n+1} + p^k \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n+1} = q^k \frac{p^2}{1-p} + p^k \frac{q^2}{1-q} \boxed{= p^2q^{k-1} + q^2p^{k-1}.}$$

c) La variable aléatoire L_2 admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{k\geq 1} kP(L_2 = k)$ converge absolument, donc converge car elle est à termes positifs. Or, pour tout $k \geq 1$:

$$kP(L_2 = k) = p^2kq^{k-1} + q^2kp^{k-1}.$$

On reconnait ici les termes généraux de deux séries géométriques dérivées, qui convergent car leur raison appartient à $]-1, 1[$. Par linéarité de la somme, on peut donc conclure que $E(L_2)$ existe et vaut :

$$\begin{aligned} E(L_2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP(L_2 = k) = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} + q^2 \sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} \\ &= p^2 \frac{1}{(1-q)^2} + q^2 \frac{1}{(1-p)^2} \boxed{= 2.} \end{aligned}$$

Partie 2 : probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

3. La fonction $f : x \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (comme composée de fonctions qui le sont), et satisfait pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = e^{-x} \geq 0$. Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$. De plus, $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$, de sorte que la tangente en $x = 0$ à $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(0) + (x - 0)f'(0) = 1 - x$.
Puisque f est convexe, sa courbe est située au dessus de toutes ses tangentes. En particulier, il suit que, pour tout réel x :

$$\boxed{1 - x \leq e^{-x}.}$$

Remarque. Une autre méthode consiste à étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto e^{-x} + x - 1$, et ainsi à montrer que g est positive sur $\mathbb{R}$.

4. a) La série $\sum_{i\geq k} P(A_i)$ est de terme général positif, donc sa suite des sommes partielles est croissante. Par le théorème de la limite monotone, soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$. Comme la série diverge par hypothèse, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty.}$$

b) On a $\overline{C_n} = \overline{\bigcup_{i=k}^{n} A_i} = \bigcap_{i=k}^{n} \overline{A_i}$. On en déduit que :

$$P(C_n) = 1 - P(\overline{C_n}) \underset{\text{indép.}}{=} \boxed{1 - \prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i}).}$$

D'autre part, il suit avec la question 3. que :

$$\forall k \leq i \leq n, \quad 0 \leq P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) \leq \exp(-P(A_i)).$$

Par produit de ces inégalités, on obtient :

$$\prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i}) \leq \exp(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)).$$

On obtient que pour tout $n \geq k$:

$$\boxed{P(C_n) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right).}$$

De plus, $P(C_n) \leq 1$ pour tout $n \geq k$, et $\lim_{n\to+\infty} 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right) = 1$. Par théorème des gendarmes, on en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(C_n) \text{ existe et vaut } 1.}$

c) Remarquons que $\boxed{C_n \subset C_{n+1}}$ pour tout $n \geq k$. Par théorème de la limite monotone, on en déduit que :

$$P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n) \boxed{= 1.}$$

d) Pour tout $i \geq k$:

$$A_i \subset C_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n.$$

Donc $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$. Réciproquement, pour tout $n \geq k$:

$$C_n = \bigcup_{i=k}^{n} A_i \subset \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i.$$

Ainsi, $\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n \subset \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$. On en déduit que :

$$\boxed{\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n.}$$

D'où finalement $P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n\right) \boxed{= 1.}$

5. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. Notons D_ℓ l'évènement « avoir deux Pile consécutifs après le ℓ-ème lancer ». Posons $k = \begin{cases} \ell & \text{si } \ell \text{ pair} \\ \ell + 1 & \text{si } \ell \text{ impair} \end{cases}$. Alors :

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \subset D_\ell$$

car $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$ est l'évènement « obtenir Pile à un lancer d'ordre pair ainsi qu'au lancer suivant après le ℓ-ème lancer » qui est bien inclus dans l'évènement « avoir deux Pile consécutifs après le ℓ-ème lancer ». On en déduit que :

$$P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) \leq P(D_\ell) \leq 1.$$

Or $P(A_i) = P(P_{2i} \cap P_{2i+1}) = p^2$. La série $\sum_{i \geq k} P(A_i)$ diverge (grossièrement). De plus, les évènements A_i sont bien mutuellement indépendants de manière évidente. Par les questions précédentes, on en déduit que $P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1$. On obtient donc :

$$1 \leq P(D_\ell) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(D_\ell) = 1.}$$

Il est donc quasi-certain d'obtenir deux Pile consécutifs après n'importe quel lancer.