**La calculatrice est interdite.** Durée de l'épreuve : 1h.

# 1 Quelques calculs pour s'échauffer !

**Exercice 1** 1. Factoriser et réduire :

a) $4x^2 - 49$ b) $9x^2 - 12x + 4 + (2 - 3x)(4x + 1)$

2. Résoudre l'équation :

a) $(x + 3)(3x + 7) = 2x^2 + 12x + 18 - x - 1$

**Exercice 2** Simplifier au maximum **l'une des expressions suivantes** :

$$\text{Niveau débutant (2pts) : } \frac{5^{n+1}(7n+1)}{7^{n+1}} - \frac{5^n(5n+2)}{7^n}$$

$$\text{Niveau confirmé (3pts) : } \frac{11^{2n+1}(11n+1)}{8^{n+1}} - \frac{121^{n+1}(2n-5)}{2^{3n+4}}$$

$$\text{Niveau expert (4pts) : } \frac{22^{2n+3}(7n-6)}{14^{2n+1}} - \frac{121^{n+1}(44n-32)}{49^n}$$

**Exercice 3** Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{4x^2 + 20x + 25}{49x^2 - 36} \geq \frac{4x + 10}{7x + 6}.$$

# Récurrences

**Exercice 4** 1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. **Plus difficile.** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

# 2 Ensemble de définition de fonctions.

**Exercice 5** Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes. On justifiera soigneusement la réponse.

1. $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$

2. $f_3 : x \mapsto \ln\left(\frac{2+x}{3-x}\right)$

# 3 Système d'équations.

**Exercice 6** Résoudre les systèmes suivants :

1.

$$\begin{cases} 3x + y - 8 &= 0 \\ 2x - 2y &= 24 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x + 2z &= 1 \\ -y + z &= 2 \\ x - 2y &= 1 \end{cases}$$

**Exercice 7** Un groupe de 15 amis décide d'aller passer ses vacances, en partant de Genève, à Rome. Pour y aller, huit d'entre eux préfèrent prendre l'avion et les autres, plus écolos, prennent le train. Collectivement, leur aller représente 374kg de CO2 émis.

Suivant l'exemple plus vertueux de leurs camarades, quatre de plus rentrent en train. Collectivement, le retour représente 202kg de CO2 émis. Combien de CO2 émet un trajet en avion (par passager) ? En train ?

**Exercice 8 (Plus difficile)**

Déterminer tous les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie :

1. $P(-1) = 5, P(1) = 1$ et $P(2) = 2$;
2. $P(-1) = 4$ et $P(2) = 1$.