Devoir Surveillé n°1

La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

Conseils :

1. Lire tout le sujet en entier et en détail avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices.
2. Le DS est long, il ne faut pas paniquer si vous n'arrivez pas à finir.
3. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
4. Une présentation agréable sera appréciée : laisser une marge à gauche et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Questions de cours

— Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton

— Rappeler le résultat sur l'unicité de la limite, et donner sa démonstration.

Des exercices proches du cours

Exercice 1 (Logique mathématique) Donner, avec des quantificateurs, la définition de :

— $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est croissante

— $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est constante

— $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ s'annule au moins une fois

— $f : E \mapsto F$ est injective, surjective.

— $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to l \in \mathbb{R}$

Puis donner la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$ ainsi que sa négation et sa contraposée.

Exercice 2 (Équations et inéquations) En précisant soigneusement les ensembles de définition et de résolution, résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue x réelle :

1. $|3x-2| = 2x-1$
2. $\sqrt{-2x-5} = x+4$.
3. $2\ln(2) + \ln(x^2+2x) - \ln(3x+6) = 0$.
4. $4e^{3x} + 24e^{2x} = 28e^x$.
5. $\ln(x^2-2x-8) \geq 0$
6. $\ln(1+x) + x^2 = 4 + \ln(3)$

Exercice 3 (Ensembles et opérations) Étant donné A, B et C trois parties de E, justifier les équivalences suivantes :

1. $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$
2. $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \iff B = C$

Exercice 4 (Suites et limites simples)

1. Donnez l'expression en fonction de n du terme général des suites u_n ci dessous, et précisez la valeur de la limite de cette suite.
   (a) $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 2$
   (b) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1$
   (c) $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -\frac{u_{n+1}}{3} + \frac{2u_n}{3}$
2. Calculez les limites des suites suivantes :
   (a) $u_n = \dfrac{2n^2 + n + 3}{2n^3 + n^2 + 1}$
   (b) $u_n = \dfrac{\cos(n)}{2n + 3}$
   (c) $u_n = \dfrac{1}{n^3 - 2^n}\sin(n)$
   (d) $u_n = 3n - \sqrt{9n^2 + 2n + 5}$

Morceaux des DMs

Exercice 5 (DM1 : Fonctions injectives, surjectives)

1. Soient E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
   Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.
2. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective.
   Montrer que f et g sont bijectives

Exercice 6 (DM2)

1. Soient k et n deux entiers avec $0 < k \leq n$. Montrer que :
$$\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}.$$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
3. Ecrire un programme Python qui calcule la somme de droite. Tout oubli de ponctuation ou d'espaces entraînera des points en moins. Votre programme commencera par :
   def somme(n)

Exercices et problèmes plus originaux

Exercice 7

Soient deux réels a et b avec $0 < b < a$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$\begin{cases} u_0 &= a \\ v_0 &= b \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases}$$

1. Montrez que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$
2. (a) Justifiez que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > v_n$.
3. Démontrez que (u_n) est une suite décroissante, et que (v_n) est croissante.
4. (a) Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$

   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (a - b)$
5. Justifiez que (u_n) et (v_n) sont adjacentes
6. Etudiez la suite $(u_n v_n)$ et déterminez la limite commune à u_n et v_n.

Exercice 8 (Probabilités et lancers de pièce) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue $2n$ lancers indépendants d'une pièce truquée où la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$.

1. Introduire des événements élémentaires liés à l'expérience.
2. On introduit pour tout $i \in [\![1, 2n]\!]$ l'événement A_i "on obtient pile pour la première fois au lancer i", ainsi que l'événement A_0 "on n'obtient aucun pile".

   (a) Calculer $P(A_0)$. On commencera par décrire A_0 en fonction des événements élémentaires !

   (b) Calculer $P(A_i)$ pour tout $i \in [\![1, 2n]\!]$.

   (c) Vérifier par le calcul que $\sum_{i=0}^{2n} P(A_i) = 1$. Comment aurait-on pu faire sinon ?
3. On introduit pour tout $j \in [\![2, 2n]\!]$ l'événement B_j "pour la première fois, on obtient deux résultats identiques aux lancers $j-1$ et j".

   (a) Expliciter B_2, B_3 et B_4.

   (b) Expliciter alors B_{2j} et B_{2j+1} pour $j \geq 1$, puis en déduire leur probabilité.

Exercice 9 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2)

1. Rappeler le résultat du cours sur les SRL2 et en donner une démonstration dans le cas de deux racines distinctes.
2. On va maintenant s'intéresser au cas où il n'y a qu'une racine double. On pose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On pose λ la racine double du polynôme caractéristique.

   (a) Expliquer à quel endroit de la preuve précédente le fait d'avoir une racine double bloque.

   (b) Écrire les coefficients a et b en fonction de λ et en déduire que la suite $(u_{n+1} - \lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique (préciser sa raison).

   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2(u_{n+2} - \lambda u_{n+1}) = u_{n+2} - \lambda^2 u_n$.

   (d) Montrer que, pour tout n entier, on a alors :

$$(n+2)(u_{n+2} - \lambda u_{n+1}) = u_{n+2} - \lambda^{n+2} u_0.$$

(e) Montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \alpha(n+2) \times \lambda^{n+1} + \beta\lambda^{n+2}.$$

(On précisera la valeur de α et β en fonction des premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.)

(f) Terminer la preuve du théorème.

Exercice 10 (Suite récurrente et comportement asymptotique) On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2 \quad \text{et} \quad u_0 = a,\ a \in \mathbb{R}_+^*$$

Partie 1 : Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Montrer que cette suite est strictement positive et monotone.
2. Montrer que cette suite diverge vers $+\infty$.

Partie 2 : Comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln u_n$.

4. Prouver que pour tout entier n de $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)$.
5. En déduire que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$: $0 < v_{k+1} - v_k \leq \dfrac{1}{2^{k+1}}\ln\left(1+\dfrac{1}{a}\right)$.
6. En sommant l'encadrement précédent, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n - v_0 \leq \ln\left(1+\dfrac{1}{a}\right)$.
7. Déduire des questions précédentes que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On notera α sa limite.
8. Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$.
9. À l'aide de la question 4, montrer que pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$: $v_{n+k+1} - v_{n+k} \leq \dfrac{1}{2^{n+k+1}}\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)$ puis que pour tous entiers p et n : $v_{n+p+1} - v_n \leq \dfrac{1}{2^n}\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)$.
10. En passant à la limite quand $p \to +\infty$, avec n fixé, dans l'encadrement précédent, montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1$.
11. Montrer alors que $\dfrac{u_n}{\exp(\alpha 2^n)} \to 1$ (*Remarque :* on dira plus tard que $u_n \sim \exp(\alpha 2^n)$).
12. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$.
    Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n)$.
13. Justifier que $(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
    En déduire que $u_n - \exp(\alpha 2^n) - \dfrac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (*Remarque :* on dira plus tard que : $u_n = \exp(\alpha 2^n) + \dfrac{1}{2} + o(1)$).