Lycée Louis Pergaud - Besançon

Devoir Surveillé nř1

ECG1 – Mathématiques 17 Octobre 2025

La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

Conseils :

1. Lire tout le sujet en entier et en détail avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices.
2. Le DS est long, il ne faut pas paniquer si vous n'arrivez pas à finir.
3. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
4. Une présentation agréable sera appréciée : laisser une marge à gauche et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Questions de cours

- Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton
- Rappeler le résultat sur l'unicité de la limite, et donner sa démonstration.

> Voir cours. Ne pas oublier de faire un dessin pour la deuxième question.

Des exercices proches du cours

Exercice 1 (Logique mathématique) Donner, avec des quantificateurs, la définition de :

- $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est croissante
- $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est constante
- $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ s'annule au moins une fois
- $f : E \mapsto F$ est injective, surjective.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to l \in \mathbb{R}$

Puis donner la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$ ainsi que sa négation et sa contraposée.

> - $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est croissante :
>
> $$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)}$$
>
> - $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est constante :
>
> $$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)}$$

ou

$$\boxed{\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c}$$

- $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ s'annule au moins une fois :

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0}$$

- $f : E \mapsto F$ est injective :

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2}$$

- $f : E \mapsto F$ est surjective :

$$\boxed{\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y}$$

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to l \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - l| < \varepsilon}$$

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$:

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n > M}$$

- Négation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$:

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } u_n \leq M}$$

- Contraposée de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$:

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M \implies n < N}$$

Exercice 2 (Équations et inéquations) En précisant soigneusement les ensembles de définition et de résolution, résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue x réelle :

1. $|3x - 2| = 2x - 1$
2. $\sqrt{-2x - 5} = x + 4$.
3. $2\ln(2) + \ln(x^2 + 2x) - \ln(3x + 6) = 0$.
4. $4e^{3x} + 24e^{2x} = 28e^x$.
5. $\ln(x^2 - 2x - 8) \geq 0$
6. $\ln(1 + x) + x^2 = 4 + \ln(3)$

1. $|3x - 2| = 2x - 1$. Domaine de définition : $\mathbb{R}$. Domaine de résolution : $2x - 1 \geq 0 \iff x \in [\frac{1}{2}, +\infty[$. Sur le domaine de résolution, on a

$$|3x - 2| = 2x - 1 \iff 3x - 2 = 2x - 1 \quad \text{ou} \quad 3x - 2 = 1 - 2x$$
$$\iff \boxed{x = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{x = \frac{3}{5}}$$

2. Domaine de définition : $-2x-5 \geq 0 \iff x \leq -\frac{5}{2}$. Domaine de résolution : $x+4 \geq 0$

car une racine est positive.

Donc $\boxed{D_{res} = [-4, -\frac{5}{2}]}$

Pour $x \in D_{res}$, on a :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{-2x-5} = x+4 \\
\iff &-2x-5 = (x+4)^2 \\
\iff &-2x-5 = x^2+8x+16 \quad \text{car } x \to x^2 \text{ est injective sur } \mathbb{R}_+ \\
\iff &x^2+10x+21 = 0 \\
\iff &(x+3)(x+7) = 0 \\
\iff &\boxed{x=-3} \text{ ou } x = -7 \notin D_{res}
\end{aligned}$$

3. $2\ln(2) + \ln(x^2+2x) - \ln(3x+6) = 0$

   Domaine de définition : $x^2+2x > 0$ et $3x+6 > 0$, soit $x(x+2) > 0$ et $x > -2$. Donc $x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$ et $x > -2$, soit $\boxed{D_d =]0, +\infty[}$.

   Pour $x \in D_d$, on a :

$$\begin{aligned}
&2\ln(2) + \ln(x^2+2x) - \ln(3x+6) = 0 \\
\iff &\ln(4) + \ln(x(x+2)) - \ln(3(x+2)) = 0 \\
\iff &\ln\left(\frac{4x(x+2)}{3(x+2)}\right) = 0 \\
\iff &\ln\left(\frac{4x}{3}\right) = 0 \\
\iff &\frac{4x}{3} = 1 \quad (\text{car } \ln \text{ est injective sur } \mathbb{R}_+^*) \\
\iff &\boxed{x = \frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

   Attention, si vous ne simplifiez pas plus tôt, à bien écarter la solution qui n'est pas dans D_d

4. $4e^{3x} + 24e^{2x} = 28e^x$

   Domaine de définition et de résolution : $\mathbb{R}$.

   En divisant par $e^x > 0$:

$$\begin{aligned}
&4e^{2x} + 24e^x = 28 \\
\iff &4e^{2x} + 24e^x - 28 = 0 \\
\iff &e^{2x} + 6e^x - 7 = 0
\end{aligned}$$

   En posant $X = e^x > 0$, on obtient :

$$X^2 + 6X - 7 = 0$$

   En utilisant les relations coeeficients-racines on trouve : $X = 1$ et $X = -7$.

   Comme $X = e^x > 0$, seule $X = 1$ convient. Donc $e^x = 1 \iff \boxed{x = 0}$ (car exp est injective sur $\mathbb{R}$).

5. $\ln(x^2 - 2x - 8) \geq 0$

   Domaine de définition : $x^2 - 2x - 8 > 0$. $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$, donc $D_d =]-\infty, -2[\cup]4, +\infty[$.

   Pour $x \in D_d$:

$$\begin{aligned} \ln(x^2 - 2x - 8) \geq 0 &\iff x^2 - 2x - 8 \geq 1 \\ &\iff x^2 - 2x - 9 \geq 0 \end{aligned}$$

   $\Delta = 4 + 36 = 40$, donc les racines sont :

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{10}}{2} = 1 - \sqrt{10} \quad \text{et} \quad x_2 = 1 + \sqrt{10}$$

   Donc $x^2 - 2x - 9 \geq 0 \iff x \in]-\infty, 1 - \sqrt{10}] \cup [1 + \sqrt{10}, +\infty[$.

   En intersectant avec D_d (on précise qu'on y a pensé, $\sqrt{10} \approx 3.16$) :

$$\boxed{S =]-\infty, 1 - \sqrt{10}[\cup[1 + \sqrt{10}, +\infty[}$$

6. $\ln(1 + x) + x^2 = 4 + \ln(3)$

   Domaine de définition : $1 + x > 0 \iff x > -1$, donc $D_d =]-1, +\infty[$.

   Ici, pas de solution simple, mais on remarque que si on pose $f : x \to \ln(1 + x) + x^2$ l'équation devient :

$$f(x) = f(2)$$

   On montre alors que f est injective sur D_d : f est dérivable sur D_d et $f'(x) = \frac{1}{1+x} + 2x > 0$ pour $x > -1$. Donc f est strictement croissante sur D_d, donc injective.

   Ainsi $f(x) = f(2)$ admet une unique solution : $\boxed{x = 2}$.

Exercice 3 (Ensembles et opérations) Étant donné A, B et C trois parties de E, justifier les équivalences suivantes :

1. $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$
2. $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \iff B = C$

1. Montrons l'équivalence $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$.

   Sens direct : Supposons $A \cup B = A \cap C$.

   Montrons d'abord que $B \subset A$: Soit $x \in B$. Alors $x \in A \cup B = A \cap C$, donc $x \in A$ et $x \in C$. En particulier, $x \in A$. Donc $B \subset A$.

   Montrons ensuite que $A \subset C$: Soit $x \in A$. Puisque $A \cup B = A \cap C$ et que $x \in A$, on a $x \in A \cup B$. Donc $x \in A \cap C$, ce qui implique $x \in C$. Donc $A \subset C$.

   Sens réciproque : Supposons $B \subset A \subset C$.

   Montrons l'égalité par double inclusion :

   $A \cup B \subset A \cap C$: Soit $x \in A \cup B$.

- Si $x \in A$, alors $x \in C$ (car $A \subset C$), donc $x \in A \cap C$.
- Si $x \in B$, alors $x \in A$ (car $B \subset A$), puis $x \in C$ (car $A \subset C$), donc $x \in A \cap C$.

Dans tous les cas, $x \in A \cap C$.

$A \cap C \subset A \cup B$: Soit $x \in A \cap C$. Alors $x \in A$, donc $x \in A \cup B$.

Donc $\boxed{A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C}$.

2. Montrons l'équivalence $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \iff B = C$.

Sens direct : Supposons $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.

Montrons l'égalité par double inclusion :

$B \subset C$: Soit $x \in B$.

- Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B = A \cap C$, donc $x \in C$.
- Si $x \notin A$, alors $x \in B \setminus A$. Comme $x \in B$, on a $x \in A \cup B = A \cup C$. Puisque $x \notin A$, on doit avoir $x \in C$.

Dans tous les cas, $x \in C$.

$C \subset B$: Par symétrie du raisonnement précédent.

Sens réciproque : Supposons $B = C$.

Alors trivialement :

- $A \cup B = A \cup C$ (en remplaçant B par C)
- $A \cap B = A \cap C$ (en remplaçant B par C)

Donc $\boxed{\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \iff B = C}$.

Exercice 4 (Suites et limites simples)

1. Donnez l'expression en fonction de n du terme général des suites u_n ci dessous, et précisez la valeur de la limite de cette suite.

   (a) $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 2$

   (b) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1$

   (c) $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -\frac{u_{n+1}}{3} + \frac{2u_n}{3}$

2. Calculez les limites des suites suivantes :

   (a) $u_n = \frac{2n^2+n+3}{2n^3+n^2+1}$

   (b) $u_n = \frac{\cos(n)}{2n+3}$

   (c) $u_n = \frac{1}{n^3-2^n}\sin(n)$

   (d) $u_n = 3n - \sqrt{9n^2+2n+5}$

1. (a) $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 2$

   La suite est arithmétique de raison -2. Le terme général est donné par :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + n \cdot (-2) = 3 - 2n$$

   La limite de cette suite est :

   $$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty}$$

   (b) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1$

   La suite est arithmético-géométrique. Pour trouver le terme général, nous résolvons l'équation de point fixe :

   $$c = \frac{1}{3}c - 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}c = -1 \Leftrightarrow c = -\frac{3}{2}$$

   En posant $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + \frac{3}{2}$, nous obtenons :

   $$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{3}{2} = \frac{1}{3}u_n - 1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(v_n - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}v_n$$

   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + \frac{3}{2} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$:

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

   Donc, le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$$

   La limite de cette suite est :

   $$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = -\frac{3}{2}}$$

(c) $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -\frac{u_{n+1}}{3} + \frac{2u_n}{3}$

La suite est définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est :

$$\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda - \frac{2}{3} = 0$$

En utilisant les relations coefficients-racines, on trouve que les racines sont :

$$\lambda_1 = \frac{-1+5}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-1-5}{6} = -1$$

Le terme général est de la forme :

$$u_n = A\left(\frac{2}{3}\right)^n + B(-1)^n$$

En utilisant les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{3}{2}$:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A \cdot \frac{2}{3} + B \cdot (-1) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

De la première équation : $B = 1 - A$

En substituant dans la seconde : $\frac{2A}{3} - (1 - A) = \frac{3}{2}$

$$\frac{2A}{3} - 1 + A = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5A}{3} = \frac{5}{2} \Rightarrow A = \frac{3}{2}$$

Donc $B = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

Le terme général est :

$$u_n = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{2}(-1)^n$$

La suite n'a pas de limite car les termes pairs et impairs ont des comportements différents à l'infini.

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'a pas de limite}}$$

2. (a) $u_n = \frac{2n^2+n+3}{2n^3+n^2+1}$

En divisant le numérateur et le dénominateur par n^3 :

$$u_n = \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}$$

En prenant la limite lorsque $n \to \infty$:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{0+0+0}{2+0+0} = 0}$$

(b) $u_n = \frac{\cos(n)}{2n+3}$
La fonction $\cos(n)$ est bornée entre -1 et 1, donc :

$$-\frac{1}{2n+3} \leq \frac{\cos(n)}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$$

Par le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}$$

(c) $u_n = \frac{1}{n^3-2^n}\sin(n)$
La fonction $\sin(n)$ est bornée entre -1 et 1. Pour n assez grand, $n^3 - 2^n < 0$ (car 2^n croît plus vite que n^3), donc :

$$\frac{1}{2^n - n^3} \leq \frac{1}{n^3 - 2^n}\sin(n) \leq -\frac{1}{2^n - n^3}$$

Par croissances comparées, $2^n - n^3 \to +\infty$, donc par le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}$$

(d) $u_n = 3n - \sqrt{9n^2+2n+5}$
C'est une forme indéterminée. On utilise l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} u_n &= (3n - \sqrt{9n^2+2n+5}) \cdot \frac{3n + \sqrt{9n^2+2n+5}}{3n + \sqrt{9n^2+2n+5}} \\ &= \frac{(3n)^2 - (9n^2+2n+5)}{3n + \sqrt{9n^2+2n+5}} \\ &= \frac{9n^2 - 9n^2 - 2n - 5}{3n + \sqrt{9n^2+2n+5}} \\ &= \frac{-2n-5}{3n + \sqrt{9n^2+2n+5}} \end{aligned}$$

En divisant numérateur et dénominateur par n :

$$u_n = \frac{-2 - \frac{5}{n}}{3 + \sqrt{9 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}}$$

En prenant la limite :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{-2}{3+3} = -\frac{1}{3}}$$

Morceaux des DMs

Exercice 5 (DM1 : Fonctions injectives, surjectives)

1. Soient E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
   Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

2. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective.
   Montrer que f et g sont bijectives

Correction :

1. Soient E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
   Montrons que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

   $\Rightarrow$ Supposons que f est injective c'est-à-dire : $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.
   Montrons que f est surjective, c'est-à-dire : $\forall y \in E,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$.
   Soit $y \in E$. On a $f(f(f(y))) = f(y)$. Par l'injectivité de f, on a alors :

   $$f(f(y)) = y.$$

   En posant $x = f(y)$, on obtient :

   $$f(x) = f(f(y)) = y.$$

   Donc, pour chaque $y \in E$, il existe un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
   Ainsi, $\boxed{f \text{ est surjective.}}$

   $\Leftarrow$ Supposons que f est surjective, c'est-à-dire : $\forall y \in E,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$.
   Montrons que f est injective, c'est-à-dire : $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.
   Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.
   Comme f est surjective, il existe $z_1 \in E$ tel que $f(z_1) = x_1$ et $z_2 \in E$ tel que $f(z_2) = x_2$.
   On a alors :

   $$f(f(z_1)) = f(x_1) = f(x_2) = f(f(z_2)).$$

   En appliquant encore f des deux côtés, on obtient :

   $$x_1 = f(z_1) = f(f(f(z_1))) = f(f(f(z_2))) = f(z_2) = x_2.$$

   Donc, $\boxed{f \text{ est injective.}}$

2. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective.
   Montrons que f et g sont bijectives.

   - Montrons que f est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Appliquons g des deux côtés :

     $$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

     En appliquant f à nouveau, nous obtenons

     $$f(g(f(x_1))) = f(g(f(x_2))).$$

Par l'injectivité de $f \circ g \circ f$, cela implique que

$$x_1 = x_2.$$

Donc, $\boxed{f \text{ est injective.}}$

- Montrons que f est surjective. Soit $y \in F$. Nous devons montrer qu'il existe un $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Puisque $f \circ g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que :
$$y = f \circ g \circ f(x).$$
Donc, en posant $x' = g(f(x))$, on a bien
$$y = f(x').$$
Par la bijectivité de $f \circ g \circ f$, il existe un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est surjective.}}$
Donc, $\boxed{f \text{ est bijective.}}$
- Montrons que g est bijective.
Première version (plus simple) : Puisque f est bijective, elle admet une fonction inverse $f^{-1} : F \to E$.
On a alors :
$$g = f^{-1} \circ (f \circ g \circ f) \circ f^{-1}.$$
Ainsi, g est bijective comme composée de fonctions bijectives.
Deuxième version :
  - Montrons que g est injective. Soient $y_1, y_2 \in F$ tels que $g(y_1) = g(y_2)$. Appliquons f des deux côtés :
$$f(g(y_1)) = f(g(y_2)).$$
De plus, comme f est surjective, il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. En remplaçant, nous obtenons :
$$f(g(f(x_1))) = f(g(f(x_2))).$$
Par l'injectivité de $f \circ g \circ f$, cela implique que
$$x_1 = x_2.$$
Donc, $\boxed{g \text{ est injective.}}$
  - Montrons que g est surjective. Soit $x \in E$. Nous devons montrer qu'il existe un $y \in F$ tel que $g(y) = x$.
Comme $f \circ g \circ f$ est surjective, il existe $z \in E$ tel que
$$f(g(f(z))) = f(x).$$

Comme f est injective, cela implique que

$$g(f(z)) = x.$$

En posant $y = f(z)$, on obtient :

$$g(y) = g(f(z)) = x.$$

Ainsi, $\boxed{g \text{ est surjective.}}$ Donc, $\boxed{g \text{ est bijective.}}$

Exercice 6 (DM2) 1. Soient k et n deux entiers avec $0 < k \leq n$. Montrer que :

$$\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

3. Ecrire un programme Python qui calcule la somme de droite. Tout oubli de ponctuation ou d'espaces entraînera des points en moins. Votre programme commencera par :
def somme(n)

Correction :

1. Soient k et n deux entiers avec $0 < k \leq n$. En utilisant la définition des coefficients binomiaux, nous avons :

$$\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n-k+1)!}.$$

Et

$$\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)k!(n+1-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k+1)!}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}.}$$

2. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Initialisation : Pour $n = 1$,

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{1}{k} = \frac{(-1)^{1+1}}{1}\binom{1}{1} = 1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}.$$

La propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

et montrons que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) \quad \text{Triangle de Pascal} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}\end{aligned}$$

Pour le premier terme, utilisons le résultat de la première question (attention, il faut $k \leq n$):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1} + \frac{(-1)^{(n+1)+1}}{n+1}\binom{n}{(n+1)-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k} + \frac{(-1)^{(n+2)}}{n+1} \quad \text{Question 1)} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k} \quad \text{c'est le dernier terme de la somme} \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k} - (-1)^1\binom{n+1}{0}\right) \\ &= \frac{1}{n+1}(0^{n+1} - (-1)) \quad \text{Binôme de Newton} \\ &= \boxed{\frac{1}{n+1}}\end{aligned}$$

Pour le deuxième terme, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\binom{n}{n+1} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que $\binom{n}{n+1} = 0$.

Conclusion : Par application du principe de récurrence, On a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.}$$

Exercices et problèmes plus originaux

Exercice 7

Soient deux réels a et b avec $0 < b < a$. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= a \\ v_0 &= b \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= \frac{u_n+v_n}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \end{cases}$$

1. Montrez que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$
2. (a) Justifiez que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$
(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > v_n$.
3. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. (a) Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$
(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (a - b)$
5. Justifiez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes
6. Etudiez la suite (u_nv_n) et déterminez la limite commune à u_n et v_n.

Correction :

1. Montrons que les suites sont bien définies et strictement positives par récurrence.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$.
Héréditié : Soit $n \in \mathbb{N}$ Supposons que $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Alors :
$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} > 0$$
car somme de deux nombres positifs.
$$v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} > 0$$
car produit et quotient de nombres positifs.
Conclusion : Par application du principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \text{ et } v_n > 0}$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} \\ &= \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_nv_n}{2(u_n + v_n)} \\ &= \frac{u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2 - 4u_nv_n}{2(u_n + v_n)} \\ &= \boxed{\frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}} \end{aligned}$$

(b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > v_n$:

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = a > 0 = b = v_0$, donc $u_0 > v_0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > v_n$. Alors d'après la question précédente :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

Comme $u_n > v_n$, on a $u_n - v_n > 0$, donc $(u_n - v_n)^2 > 0$. De plus, $u_n + v_n > 0$ car $u_n, v_n > 0$. Donc $u_{n+1} - v_{n+1} > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > v_{n+1}$.

Conclusion : Par application du principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > v_n}$.

3. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} < 0$$

car $v_n < u_n$. Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$

Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - v_n = \frac{2u_n v_n - v_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = \frac{v_n(u_n - v_n)}{u_n + v_n} > 0$$

car $u_n > v_n$. Donc $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 2.a), on a :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

Comme $u_n > v_n > 0$, on a $u_n + v_n > u_n - v_n$ et donc :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - v_n)\frac{u_n - v_n}{u_n + v_n} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$$

(tout est positif dans le produit)

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (a - b)$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$$u_0 - v_0 = a - b \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 (a - b) = a - b$$

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leq u_n - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (a - b)$.

D'après la question précédente, on a :

$$0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n) \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n (a-b) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (a-b)$$

Conclusion : Par application du principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (a-b)}$.

5. D'après les questions précédentes :
   - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $v_0 = b$
   - $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $u_0 = a$
   - $u_n - v_n \to 0$

   On montre le dernier point avec le théorème des gendarmes !

   Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes}}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$u_{n+1}v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \cdot \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} = u_nv_n$$

   Donc (u_nv_n) est constante : $\boxed{u_nv_n = ab}$.

   Si ℓ est la limite commune, alors $\ell^2 = ab$, donc $\boxed{\ell = \sqrt{ab}}$ (moyenne géométrique).

Exercice 8 (Probabilités et lancers de pièce) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue $2n$ lancers indépendants d'une pièce truquée où la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$.

1. Introduire des événements élémentaires liés à l'expérience.
2. On introduit pour tout $i \in [\![1, 2n]\!]$ l'événement A_i "on obtient pile pour la première fois au lancer i", ainsi que l'événement A_0 "on n'obtient aucun pile".
   (a) Calculer $P(A_0)$. On commencera par décrire A_0 en fonction des événements élémentaires !
   (b) Calculer $P(A_i)$ pour tout $i \in [\![1, 2n]\!]$.
   (c) Vérifier par le calcul que $\sum_{i=0}^{2n} P(A_i) = 1$. Comment aurait-on pu faire sinon ?
3. On introduit pour tout $j \in [\![2, 2n]\!]$ l'événement B_j "pour la première fois, on obtient deux résultats identiques aux lancers $j-1$ et j".
   (a) Expliciter B_2, B_3 et B_4.
   (b) Expliciter alors B_{2j} et B_{2j+1} pour $j \geq 1$, puis en déduire leur probabilité.

Correction :

1. On pose, pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, F_k ="On obtient face au k-ième lancer.

   Les événements élémentaires sont les suites de $2n$ résultats, chacun étant soit pile soit face.

2. (a) L'événement A_0 correspond à "on n'obtient aucun pile", c'est-à-dire qu'on ob-

tient face à tous les lancers : $A_0 = F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{2n}$.
Par indépendance des lancers : $\boxed{P(A_0) = (1-p)^{2n}}$

(b) Pour $i \in [\![1, 2n]\!]$, l'événement A_i correspond à "on obtient pile pour la première fois au lancer i", c'est-à-dire qu'on obtient face aux lancers $1, 2, \ldots, i-1$ et pile au lancer i :

$$A_i = F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{i-1} \cap P_i$$

Par indépendance : $\boxed{P(A_i) = (1-p)^{i-1} \cdot p}$

(c) Vérifions que $\sum_{i=0}^{2n} P(A_i) = 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2n} P(A_i) &= P(A_0) + \sum_{i=1}^{2n} P(A_i) \\
&= (1-p)^{2n} + \sum_{i=1}^{2n} (1-p)^{i-1} p \\
&= (1-p)^{2n} + p \sum_{i=0}^{2n-1} (1-p)^i \\
&= (1-p)^{2n} + p \cdot \frac{1-(1-p)^{2n}}{1-(1-p)} \\
&= (1-p)^{2n} + p \cdot \frac{1-(1-p)^{2n}}{p} \\
&= (1-p)^{2n} + 1 - (1-p)^{2n} = 1
\end{aligned}$$

Autre méthode : Les événements $A_0, A_1, \ldots, A_{2n}$ forment une partition de l'univers (ils sont incompatibles et leur union est l'univers), donc la somme de leurs probabilités vaut 1.

3. (a) Explicitons les premiers événements :

- B_2 : "Les lancers 1 et 2 donnent le même résultat" donc

$$\boxed{B_2 = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)}$$

- B_3 : "Les lancers 1 et 2 donnent des résultats différents, et les lancers 2 et 3 donnent le même résultat" donc

$$\boxed{B_3 = (P_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3)}$$

- B_4 : "Les trois premières paires de lancers consécutifs donnent des résultats différents, et les lancers 3 et 4 donnent le même résultat" donc

$$\boxed{B_4 = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4)}$$

(b) Pour $j \geq 1$:

- $B_{2j} = (P_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap P_{2j-1} \cap P_{2j}) \cup (F_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap F_{2j-1} \cap F_{2j})$ donc $P(B_{2j}) = [p(1-p)]^{j-1} \cdot (p^2 + (1-p)^2) = \boxed{[p(1-p)]^{j-1} \cdot (p^2 + (1-p)^2)}$
- $B_{2j+1} = (P_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap P_{2j-1} \cap F_{2j} \cap F_{2j+1}) \cup (F_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap F_{2j-1} \cap P_{2j} \cap P_{2j+1})$ donc $P(B_{2j+1}) = [p(1-p)]^j \cdot (p^2 + (1-p)^2) = \boxed{[p(1-p)]^j \cdot (p^2 + (1-p)^2)}$

Exercice 9 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2)

1. Rappeler le résultat du cours sur les SRL2 et en donner une démonstration dans le cas de deux racines distinctes.
2. On va maintenant s'intéresser au cas où il n'y a qu'une racine double. On pose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On pose λ la racine double du polynôme caractéristique.
   (a) Expliquer à quel endroit de la preuve précédente le fait d'avoir une racine double bloque.
   (b) Écrire les coefficients a et b en fonction de λ et en déduire que la suite $(u_{n+1}-\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique (préciser sa raison).
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2(u_{n+2} - \lambda u_{n+1}) = u_{n+2} - \lambda^2 u_n$.
   (d) Montrer que, pour tout n entier, on a alors :
   $$(n+2)(u_{n+2} - \lambda u_{n+1}) = u_{n+2} - \lambda^{n+2} u_0.$$
   (e) Montrer alors que:
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \alpha(n+2) \times \lambda^{n+1} + \beta\lambda^{n+2}.$$
   (On précisera la valeur de α et β en fonction des premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.)
   (f) Terminer la preuve du théorème.

Correction :

1. C'est du cours
2. Je donne ici la démonstration, je vous laisse refaire le découpage en question vous-même.

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0,\ u_1$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1}+bu_n$. Supposons que le polynôme caractéristique
   $$X^2 - aX - b$$
   admet une unique racine (double) λ.

   Via les relations coefficients/racines, on a alors :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2\lambda u_{n+1} - \lambda^2 u_n.$$
   c'est-à-dire :
   $$u_{n+2} - \lambda u_{n+1} = \lambda u_{n+1} - \lambda^2 u_n = \boxed{\lambda(u_{n+1} - \lambda u_n).}$$
   En posant $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = u_{n+1} - \lambda u_n$, on voit que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison λ:
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} = \lambda W_n.}$$
   Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. On a donc:
   $$\begin{gathered} u_{n+2} - \lambda u_{n+1} = \lambda u_{n+1} - \lambda^2 u_n \\ \text{Donc : } 2\ u_{n+2} - \lambda u_{n+1} = u_{n+2} + \lambda u_{n+1} - \lambda^2 u_n \\ \text{Et : } 2\ u_{n+2} - 2\lambda u_{n+1} = u_{n+2} - \lambda^2 u_n. \end{gathered}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 2(u_{n+2} - \lambda u_{n+1}) = u_{n+2} - \lambda^2 u_n.} \tag{1}$$

Montrons alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)(u_{n+2} - \lambda u_{n+1}) = u_{n+2} - \lambda^{n+2} u_0.$$

Initialisation : Pour $n = 0$. $2(u_2 - \lambda u_1) = u_2 - \lambda^2 u_0$: c'est le résultat de (1) avec $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $(n+2)(u_{n+2} - \lambda u_{n+1}) = u_{n+2} - \lambda^{n+2} u_0$ et montrons que : $(n+3)(u_{n+3} - \lambda u_{n+2}) = u_{n+3} - \lambda^{n+3} u_0$. On a :

$$\begin{aligned}
&(n+3)(u_{n+3} - \lambda u_{n+2}) \\
&= u_{n+3} - \lambda u_{n+2} + (n+2)(u_{n+3} - \lambda u_{n+2}) \\
&= u_{n+3} - \lambda u_{n+2} + (n+2)\lambda(u_{n+2} - \lambda u_{n+1}) && \text{car } (W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique} \\
&= u_{n+3} - \lambda u_{n+2} + \lambda(u_{n+2} - \lambda^{n+2} u_0) && \text{par HR} \\
&= u_{n+3} - \lambda^{n+3} u_0.
\end{aligned}$$

Conclusion : Par application du principe de récurrence, on a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)(u_{n+2} - \lambda u_{n+1}) = u_{n+2} - \lambda^{n+2} u_0.}$$

On peut donc écrire, pour tout entier n :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= (n+2)(u_{n+2} - \lambda u_{n+1}) + \lambda^{n+2} u_0 \\
&= (n+2)\lambda^{n+1}(u_1 - \lambda u_0) + \lambda^{n+2} u_0 && \text{car } (W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique} \\
&\boxed{= (n+2)\lambda^{n+1}\alpha + \lambda^{n+2}\beta}
\end{aligned}$$

On veut maintenant prouver le théorème, c'est-à-dire montrer que :

$$\exists A, B \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (A + Bn)\lambda^n.$$

On peut déjà remarquer que sous les hypothèses du théorème, $\lambda \neq 0$ car $b = -\lambda \neq 0$.
On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (n+2)\lambda^{n+1}\alpha + \lambda^{n+2}\beta = \boxed{\lambda^{n+2}\left(\tfrac{\alpha}{\lambda}(n+2) + \beta\right)}$$

ce qui est la formule annoncée avec $\boxed{A = \beta = u_0}$ et $\boxed{B = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{u_1 - \lambda u_0}{\lambda}.}$
Il reste à vérifier que cette formule donne u_n pour $n = 0$ et $n = 1$:

$$(A + B \times 0)\lambda^0 = A = u_0$$

et

$$(A + B \times 1)\lambda^1 = \lambda A + \lambda B = \lambda u_0 + \lambda \frac{u_1 - \lambda u_0}{\lambda} = u_1.$$

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (A + Bn)\lambda^n. \text{ où } A = u_0 \text{ et } B = \frac{u_1 - \lambda u_0}{\lambda}.}$$

Exercice 10 (Suite récurrente et comportement asymptotique) On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2 \quad \text{et} \quad u_0 = a,\ a \in \mathbb{R}_+^*$$

Partie 1 : Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Montrer que cette suite est strictement positive et monotone.
2. Montrer que cette suite diverge vers $+\infty$.

Partie 2 : Comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{2^n} \ln u_n$.

4. Prouver que pour tout entier n de $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$.
5. En déduire que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$: $0 < v_{k+1} - v_k \leq \frac{1}{2^{k+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right)$.
6. En sommant l'encadrement précédent, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n - v_0 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right)$.
7. Déduire des questions précédentes que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On notera α sa limite.
8. Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$.
9. À l'aide de la question 4, montrer que pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$: $v_{n+k+1} - v_{n+k} \leq \frac{1}{2^{n+k+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$ puis que pour tous entiers p et n : $v_{n+p+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$.
10. En passant à la limite quand $p \to +\infty$, avec n fixé, dans l'encadrement précédent, montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1$.
11. Montrer alors que $\frac{u_n}{\exp(\alpha 2^n)} \to 1$ (*Remarque :* on dira plus tard que $u_n \sim \exp(\alpha 2^n)$).
12. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$.
    Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n)$.
13. Justifier que $(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
    En déduire que $u_n - \exp(\alpha 2^n) - \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (*Remarque :* on dira plus tard que : $u_n = \exp(\alpha 2^n) + \frac{1}{2} + o(1)$).

Correction :
Partie 1 : Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Montrons que la suite est strictement positive et monotone.

   Positivité : Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   - **Initialisation :** $u_0 = a > 0$ par hypothèse.
   - **Hérédité :** Si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = u_n + u_n^2 = u_n(1 + u_n) > 0$.

   Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0}$.

   Monotonie : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 > 0$ car $u_n > 0$. Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}}$.

2. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, soit elle tend vers une limite finie ℓ soit elle diverge vers $+\infty$. Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie ℓ. En passant à la limite dans $u_{n+1} = u_n + u_n^2$, on obtient $\ell = \ell + \ell^2$, soit $\ell^2 = 0$, donc $\ell = 0$.

   Mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $u_0 = a > 0$, donc $u_n \geq a > 0$ pour tout n, ce qui contredit $\lim u_n = 0$.

   Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty}$.

Partie 2 : Comportement asymptotique

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.On a $v_n = \frac{1}{2^n}\ln u_n$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}\ln u_{n+1}$.

   Donc :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2^{n+1}}\ln u_{n+1} - \frac{1}{2^n}\ln u_n \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\ln(u_n + u_n^2) - \frac{2}{2^{n+1}}\ln u_n \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}[\ln(u_n + u_n^2) - 2\ln u_n] \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\ln\frac{u_n + u_n^2}{u_n^2} \\ &= \boxed{\frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)} \end{aligned}$$

5. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $u_0 = a$, on a $u_k \geq a$ pour tout k. Donc $\frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{a}$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^+$, et par croissance du logarithme :

$$\boxed{0 < v_{k+1} - v_k \leq \frac{1}{2^{k+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{a}\right)}$$

6. En sommant de $k = 0$ à $k = n - 1$:

$$v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{a}\right)$$

   Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}} &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1 \end{aligned}$$

   Donc

$$\boxed{v_n - v_0 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right)}.$$

7. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (car $v_{n+1}-v_n>0$) et majorée par $v_0+\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)$. Donc

$$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha\in\mathbb{R}.}$$

8. De $v_n=\frac{1}{2^n}\ln u_n\leq\alpha$, on déduit $\ln u_n\leq\alpha 2^n$, donc (croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$) :

$$\boxed{u_n\leq\exp(\alpha 2^n)}$$

9. Pour $(k,n)\in\mathbb{N}^2$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+k}\geq u_n &\implies \frac{1}{u_{n+k}}\leq\frac{1}{u_n} \quad \text{décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\implies \ln\left(1+\frac{1}{u_{n+k}}\right)\leq\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \quad \text{croissance du logarithme sur } \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} v_{n+k+1}-v_{n+k} &= \frac{1}{2^{n+k+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_{n+k}}\right) \quad \text{Question 4} \\ &\leq \frac{1}{2^{n+k+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \end{aligned}$$

En sommant de $k=0$ à $k=p$:

$$\begin{aligned} v_{n+p+1}-v_n &\leq \sum_{k=0}^{p}\frac{1}{2^{n+k+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

Or, comme vu précédemment :

$$\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{2^{k+1}}=1-(1/2)^{p+1})<1$$

donc :

$$\boxed{v_{n+p+1}-v_n\leq\frac{1}{2^n}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)}$$

10. En passant à la limite quand $p\to+\infty$:

$$\alpha-v_n\leq\frac{1}{2^n}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \alpha &\leq v_n+\frac{1}{2^n}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\ln u_n+\frac{1}{2^n}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\ln(u_n+1) \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1}$$

par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

11. On utilise le résultat des questions 8 et 10 avec le théorème des gendarmes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exp(\alpha 2^n) - 1 \leq u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$$

On divise par $\exp(\alpha 2^n) > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 - \exp(-\alpha 2^n) \leq \frac{u_n}{\exp(\alpha 2^n)} \leq 1$$

Des deux côtés, on fait tendre n vers $+\infty$:

$$\boxed{\frac{u_n}{\exp(\alpha 2^n)} \to 1.}$$

12. On a $\forall n \in \mathbb{N}, \beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$.
Des questions 8 et 10, on a : $0 \leq \beta_n \leq 1$, donc $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a d'une part :

$$\begin{aligned}\beta_{n+1} &= \exp(\alpha 2^{n+1}) - u_{n+1} \\ &= \exp(2(\alpha 2^n)) - (u_n + u_n^2) \\ &= \exp(\alpha 2^n)^2 - u_n - u_n^2\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}\beta_n^2 &= (\exp(\alpha 2^n) - u_n)^2 \\ &= \exp(\alpha 2^n)^2 - 2u_n \exp(\alpha 2^n) + u_n^2\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n) &= [2\exp(\alpha 2^n)^2 - \exp(\alpha 2^n) - 2u_n \exp(\alpha 2^n)]\exp(-\alpha 2^n) \\ &= 2\exp(\alpha 2^n) - 1 - 2u_n \\ &= 2(\exp(\alpha 2^n) - u_n) - 1 \\ &= \boxed{2\beta_n - 1}\end{aligned}$$

13. Comme (β_n) est bornée et $\exp(-\alpha 2^n) \to 0$, on a :

$$(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n) \to 0$$

De la relation précédente : $2\beta_n - 1 \to 0$, donc $\beta_n \to \frac{1}{2}$.
Ainsi : $u_n - \exp(\alpha 2^n) = -\beta_n \to -\frac{1}{2}$, d'où :

$$\boxed{u_n - \exp(\alpha 2^n) - \frac{1}{2} \to 0}$$