Devoir Surveillé 2 Version Dure
Systèmes, Polynômes, Limites

La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Exercice 1 (Questions de cours)

- Rappeller la définition d'une racine d'un polynôme. Quelle propriété vérifient les racines d'un polynôme? Démontrer ce résultat.
- Rappeler et démontrer la formule : $(A+B)^n = \cdots$ dans le cas des matrices.
- Écrire un programme calculant $\sum_{0\leq i\leq j\leq n} 2^{i+j}$, calculer cette somme mathématiquement.
- Théorème limite et suite (vous pouvez le prouver avec a et b de votre choix)

Exercice 2 (Des exercices proches du cours ou du DS précédent)

1. En précisant soigneusement les ensembles de définition et de résolution, résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle :

   a) $|2x-1| = x+3$
   b) $\sqrt{3x+7} = x+1$.
   c) $\ln(3) + \ln(x^2+x) - \ln(2x+2) = 0$.
   d) $3e^{2x} + 6e^x = 9$.
   e) $\ln(x^2-3x+2) \geq 0$
   f) $\sqrt{2x+1} + 2x^2 \geq 35$

2. Étant donné A, B et C trois parties de E, justifier l' équivalence suivante :

$$A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$$

3. Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système ci dessous :

$$S_3 : \begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$

4. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Calculez, pour tout entier n, A^n et en déduire B^n.

5. Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}_4[x]$ tels que :

$$P(0) = 0;\ P(1) = 0;\ P(-1) = 1;\ P'(1) = 0;\ P'(-1) = 2.$$

On pourra donner la réponse sous forme factorisée.

6. Donner la factorisation des polynômes suivants :

a) $P = x^4+6x^3+3x^2-10x$, b) $Q = x^5 - x^3 - 6x$, c) $R = x^4 + 6x^2 + 25$.

7. Trouver les réels a et b tels que $(X-1)^2$ divise $aX^4 + bX^3 + 1$, et factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme obtenu.

8. Calculez les limites suivantes:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4-5x^3+x^2}{3x^4+x^2-7}$ c) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2+2x-6}-3}{x^3-6x^2+12x-9}$ e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)+\exp(\sin(\frac{1}{x}))}{\sqrt{x}}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2+x-6}$ d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5e^x+x^5-3x^2}{e^{3x}+x^4+\ln^2(x)}$ f) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2(x)-\sin^2(x)}{x^4}$

Exercice 3 (Polynômes et relation fonctionnelle)
On considère E l'ensemble des polynômes à coefficients réels vérifiant la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x^2) = x^2(x^2+1)P(x) \qquad (*)$$

1. Le polynôme nul est-il solution de $(*)$? Et le polynôme $x \mapsto x^3 + x$?

2. Analyse du problème : soit P un polynôme non nul de E, donc vérifiant $(*)$.

a) Donner les degrés possibles de P.

b) Montrer que 0, 1, -1 sont racines de P.

c) En dérivant $(*)$ (attention à la dérivée de $x \mapsto P(x^2)$), montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2xP'(x^2) = 2(x^2+1)P(x) + 2x^2P(x) + x(x^2+1)P'(x)$$

d) Montrer alors que 0 est racine de P'.

e) En déduire qu'il existe un réel a tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2(x-1)(x+1)$.

3. Synthèse : déterminer tous les polynômes de l'ensemble E.

Exercice 4 (Suites et analyse numérique)
Partie I
On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par : $f(x) = \frac{1}{x+1}$

1. Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ admet une unique solution positive que l'on notera r_2 et vérifier que $r_2 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

2. Vérifier que $f(r_2) = r_2$.

3. Vérifier que pour tout $(a,b) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]^2$, $|f(b) - f(a)| \leq \frac{4}{9}|b-a|$.

4. On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Écrire une fonction python d'en-tête `def suite(n) :` qui renvoie la valeur de u_n.

b) Montrer que pour tout entier n, $u_n \in [1/2, 1]$.

c) Prouver alors: $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9}|u_n - r_2|$ puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

d) La suite u converge-t-elle? Si oui, déterminer sa limite.

e) Écrire alors un programme python qui donne une valeur approchée de r_2 à 10^{-3} près.

Partie II

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note f_N la fonction polynôme définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_N(x) = x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - 1$.

5. Ecrire une fonction python qui représente graphiquement la fonction f_N pour un entier N donné en paramètre d'entrée sur l'intervalle [0,10].
6. Montrer que f_N est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
7. Montrer que l'équation $f_N(x) = 0$ possède une unique solution positive, que l'on notera x_N. Vérifier que $x_N \in [0, 1]$.
8. Montrer la relation (*) : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-1)f_N(x) = x^{N+1} - 2x + 1$
9. Déterminer le signe de $f_{N+1}(x) - f_N(x)$ pour $x \in [0, 1]$.
10. En déduire que la suite $(x_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
11. Montrer que la suite (x_N) converge vers un nombre $x^* \in [0, 1]$.
12. Montrer que pour tout entier $N \geq 2$, $0 < x_N \leq r_2$ où le réel r_2 a été introduit partie I. En déduire : $\lim_{N\to+\infty}(x_N)^N = 0$.
13. À l'aide de la relation (*), déterminer la valeur de x^*.

Exercice 5 (Puissances de matrices et probabilités) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A n'est pas inversible.
2. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que : $A^3 = \alpha A + \beta A^2$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux réels, notés a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n A^2$.
4. Écrire une fonction Python qui au paramètre d'entrée n renvoie les valeurs de a_n et b_n.
5. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+2} = 2b_{n+1} + 8b_n$.
   b) A l'aide de la relation obtenue au a), écrire une autre fonction Python qui au paramètre d'entrée $n \in \mathbb{N}^*$ renvoie la valeur de b_n ainsi que celle de la somme $\sum_{k=1}^{n} b_k$.
   c) Déduire du a) l'expression de b_n en fonction de n, puis celle de a_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

On dispose de deux sacs S_1 et S_2 contenant chacun initialement un jeton numéroté 0 et un jeton numéroté 1. On effectue une succession d'échanges d'un jeton du sac S_1 avec un jeton du sac S_2. Ainsi, il y a toujours deux jetons dans chaque sac.
On introduit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- A_n : "à l'issue du n^{e} échange, le sac S_1 contient deux jetons 0"
- B_n : "à l'issue du n^{e} échange, le sac S_1 contient un jeton 0 et un jeton 1"
- C_n : "à l'issue du n^{e} échange, le sac S_1 contient deux jetons 1"

On convient que pour $n = 0$, $P(B_0) = 1$, et $P(A_0) = P(C_0) = 0$, et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}.$$

6. Déterminer (en justifiant) $P(A_1)$, $P(B_1)$ et $P(C_1)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier soigneusement que $X_{n+1} = \frac{1}{4}AX_n$.
8. Exprimer alors X_n en fonction de X_0 et A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9. Calculer AX_0 et A^2X_0.
10. Déduire des questions précédentes $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$ pour tout entier n.

Exercice 6 (Polynômes interpolateurs de Lagrange)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n réels deux à deux distincts. On considère la famille de polynômes $(L_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définie par:

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad L_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

1. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer le degré de L_i, les racines de L_i et $L_i(x_i)$.
2. Montrer que : $\sum_{j=1}^{n} L_j = 1$.
3. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. Montrer que : $P = \sum_{j=1}^{n} P(x_j) L_j$.
4. Exemple d'utilisation des polynômes interpolateurs de Lagrange. On souhaite déterminer une fonction polynomiale f dont la courbe passe par les trois points $A(2, 3)$, $B(4, 2)$ et $C(5, 4)$. D'après ce qui précède, on sait qu'il existe effectivement une fonction f de degré inférieur ou égal à 2 répondant au problème.
   a) Posons : $x_1 = 2, x_2 = 4$ et $x_3 = 5$. Calculer L_1, L_2, L_3.
   b) Posons : $y_1 = 3, y_2 = 2$ et $y_3 = 4$. Considérons le polynôme :

   $$f = y_1L_1 + y_2L_2 + y_3L_3$$

   Que vaut $f(x_i)$ pour $i = 1, 2$ et 3 ?
   c) Simplifier $f(x)$.

Bon courage à tous et toutes!