Devoir Surveillé 2 Version Dure
Systèmes, Polynômes, Limites

La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Exercice 1 (Questions de cours)

- Rappeller la définition d'une racine d'un polynôme. Quelle propriété vérifient les racines d'un polynôme? Démontrer ce résultat.
- Rappeler et démontrer la formule : $(A+B)^n = \cdots$ dans le cas des matrices.
- Écrire un programme calculant $\sum_{0\leq i\leq j\leq n} 2^{i+j}$, calculer cette somme mathématiquement.
- Théorème limite et suite (vous pouvez le prouver avec a et b de votre choix)

Voir cours.

Exercice 2 (Des exercices proches du cours ou du DS précédent)

1. En précisant soigneusement les ensembles de définition et de résolution, résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle :

   a) $|2x-1| = x+3$
   b) $\sqrt{3x+7} = x+1$.
   c) $\ln(3) + \ln(x^2+x) - \ln(2x+2) = 0$.
   d) $3e^{2x} + 6e^x = 9$.
   e) $\ln(x^2-3x+2) \geq 0$
   f) $\sqrt{2x+1} + 2x^2 \geq 35$

2. Étant donné A, B et C trois parties de E, justifier l' équivalence suivante :

$$A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$$

3. Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système ci dessous :

$$S_3 : \begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$

4. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Calculez, pour tout entier n, A^n et en déduire B^n.

5. Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}_4[x]$ tels que :

$$P(0)=0;\ P(1)=0;\ P(-1)=1;\ P'(1)=0;\ P'(-1)=2.$$

On pourra donner la réponse sous forme factorisée.

6. Donner la factorisation des polynômes suivants :

a) $P=x^4+6x^3+3x^2-10x$, b) $Q=x^5-x^3-6x$, c) $R=x^4+6x^2+25$.

7. Trouver les réels a et b tels que $(X-1)^2$ divise aX^4+bX^3+1, et factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme obtenu.

8. Calculez les limites suivantes:

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4-5x^3+x^2}{3x^4+x^2-7}$ c) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+2x-6}-3}{x^3-6x^2+12x-9}$ e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x)+\exp(\sin(\frac{1}{x}))}{\sqrt{x}}$

b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}$ d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5e^x+x^5-3x^2}{e^{3x}+x^4+\ln^2(x)}$ f) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2(x)-\sin^2(x)}{x^4}$

1. a) $|2x-1|=x+3$

Ensemble de définition : $D=\mathbb{R}$.

Ensemble de résolution : Comme une valeur absolue est toujours positive, il faut $x+3\geq 0$, soit $x\geq -3$.

Résolution : On distingue deux cas selon le signe de $2x-1$.

- Si $x\geq\frac{1}{2}$, alors $|2x-1|=2x-1$ et l'équation devient :

$$2x-1=x+3\iff x=4$$

Comme $4\in D_{res}$, cette solution est valide.

- Si $x<\frac{1}{2}$, alors $|2x-1|=-(2x-1)=1-2x$ et l'équation devient :

$$1-2x=x+3\iff -2=3x\iff x=-\frac{2}{3}$$

Comme $-\frac{2}{3}\in D_{res}$, cette solution est valide.

$\boxed{S=\left\{-\frac{2}{3};4\right\}}$

b) $\sqrt{3x+7}=x+1$

Ensemble de définition : $3x+7\geq 0\iff x\geq -\frac{7}{3}$, donc $D=\left[-\frac{7}{3},+\infty\right[$.

Ensemble de résolution : Comme une racine carrée est toujours positive, il faut de plus $x+1\geq 0$, soit $x\geq -1$. Donc $\boxed{D_{res}=[-1,+\infty[}$.

Résolution : Pour $x\geq -1$, on élève au carré (les deux membres sont positifs) :

$$3x+7=(x+1)^2=x^2+2x+1\iff x^2-x-6=0\quad \text{car } x\to x^2\text{injective sur } \mathbb{R}^+$$

On trouve, en utilisant les relations coefficients - racines : $x=3$ ou $x=-2$.

Comme $-2<-1$, seule $x=3$ est dans l'ensemble de résolution.

Donc $\boxed{S=\{3\}}$

c) $\ln(3)+\ln(x^2+x)-\ln(2x+2)=0$

Ensemble de définition : $x^2+x>0$ et $2x+2>0$.

$x^2+x=x(x+1)>0\iff x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ et $2x+2>0\iff x>-1$.

Donc $D =]0, +\infty[$.

Résolution : On utilise les propriétés du logarithme :

$$\ln\left(\frac{3(x^2+x)}{2x+2}\right) = 0 \iff \frac{3x(x+1)}{2(x+1)} = 1 \quad \text{car } x \to \ln(x) \text{ injective sur } \mathbb{R}^{*+}$$
$$\iff \frac{3x}{2} = 1$$
$$\iff x = \frac{2}{3}$$

$\boxed{S = \left\{\frac{2}{3}\right\}}$

d) $3e^{2x} + 6e^x = 9$

Ensemble de définition : $D = \mathbb{R}$.

Résolution : On pose $X = e^x > 0$. L'équation devient :

$$3X^2 + 6X - 9 = 0 \iff X^2 + 2X - 3 = 0 \iff (X+3)(X-1) = 0$$

Donc $X = -3$ (impossible car $X > 0$) ou $X = 1$.

Ainsi $e^x = 1 \iff x = 0$ (on a appliqué l'injectivité de $x \to e^x$ sur $\mathbb{R}$).

$\boxed{S = \{0\}}$

e) $\ln(x^2 - 3x + 2) \geq 0$

Ensemble de définition : $x^2 - 3x + 2 > 0$.

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) > 0 \iff x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$.

Donc $D =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$.

Résolution :

$$\ln(x^2 - 3x + 2) \geq 0 \iff x^2 - 3x + 2 \geq 1 \quad \text{car } x \mapsto \ln(x) \text{ croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$
$$\iff x^2 - 3x + 1 \geq 0$$

$\Delta = 9 - 4 = 5$, donc les racines sont $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

On a $x^2 - 3x + 1 \geq 0 \iff x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou $x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

On note que $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.38 < 1$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.62 > 2$.

En intersectant avec D :

$\boxed{S = \left]-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[}$

f) $\sqrt{2x+1} + 2x^2 \geq 35$

Ensemble de définition : $2x + 1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{2}$, donc $D = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Résolution : Posons $f(x) = \sqrt{2x+1} + 2x^2$. Etudions la fonction f sur D: f est dérivable sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ avec $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + 4x$. On doit trouver le signe de $f'(x)$:

- Pour $x \geq 0$, on a $f'(x) > 0$ puisque $\frac{1}{\sqrt{2x+1}} > 0$ et $4x \geq 0$.

  On résout notre équation sur $\mathbb{R}^+$ dans un premier temps : Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on cherche $x_0 \geq 0$ tel que $f(x_0) = 35$. On teste $x = 4$: $f(4) = \sqrt{9} + 32 = 3 + 32 = 35$. Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $f(x) \geq 35 \iff x \geq 4$ pour $x \geq 0$

- Pour $x \in]-\frac{1}{2}, 0[$, cela semble plus compliqué donc on fera autrement.

  Comme $x \to 2x^2$ est décroissante sur $]-\frac{1}{2}, 0[]$, on a $2x^2 \leq 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

  Comme $x \to \sqrt{2x+1}$ est croissante sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$, on a $\sqrt{2x+1} \leq \sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 1$.

  Finalement, pour $x \in]-\frac{1}{2}, 0[$, on a :

$$f(x) = \sqrt{2x+1} + 2x^2 \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < 35.$$

.

Donc $\boxed{f(x) \geq 35 \iff x \geq 4.}$

$\boxed{S = [4, +\infty[}$

2. Repris du DS précédent.

3. L'opération qu'on a envie de faire ($L_2 \leftarrow mL_1 - L_2$) est possible quelle que soit la valeur de m puisque cela concerne L_1. On obtient alors :

$$S_3 : \left\{ \begin{array}{rl} x + my & = -3 \\ (m^2-4)y & = -3m - 6 \end{array} \right.$$

Il y a maintenant 3 cas :

- Si $m^2 - 4 \neq 0$, c'est à dire si $m \notin \{2; -2\}$, le système est de rang 2 et on obtient $y = \frac{-3m-6}{m^2-4} = \frac{-3(m+2)}{(m-2)(m+2)} = \frac{-3}{m-2}$ puis $x = -3 + \frac{3m}{m-2} = \frac{6}{m-2}$
- si $m = 2$, le système devient :

$$S_3 : \left\{ \begin{array}{rl} x + 2y & = -3 \\ 0 & = -12 \end{array} \right.$$

  Il est de rang 1 et incompatible.

- si $m = -2$, on obtient :

$$S_3 : \left\{ \begin{array}{rl} x - 2y & = -3 \\ 0 & = 0 \end{array} \right.$$

  De rang 1, compatible et on a

$$S_3 \iff \left\{ \begin{array}{r} x = -3 + 2y \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

4. Il s'agit ici de remarquer que $B = A + 2I_3$ et que A et I_3 commutent.

Calcul de A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1-2 & 1+0+0 & 2+1-2 \\ 1+0-1 & 1+0+0 & 2+0-1 \\ -1+0+1 & -1+0+0 & -2+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcul de A^3 :

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

Donc A est nilpotente d'ordre 3 : $A^3 = 0_3$ et pour tout $n \geq 3$, $A^n = A^{n-3} \times A^3 = 0_3$.

Bilan pour A^n :

$$\boxed{A^0 = I_3, \quad A^1 = A, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 3,\ A^n = 0_3}$$

Calcul de B^n : Puisque $B = A + 2I_3$ et que $AI_3 = I_3A$, on peut appliquer le binôme de Newton :

$$B^n = (A + 2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} A^k$$

Comme $A^k = 0_3$ pour $k \geq 3$, la somme se réduit à :

$$B^n = 2^n I_3 + n \cdot 2^{n-1} A + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2^{n-2} A^2 = 2^n I_3 + n \cdot 2^{n-1} A + \frac{n(n-1)}{4} \cdot 2^{n-2} \cdot 2 \cdot A^2$$

$$B^n = 2^n I_3 + n \cdot 2^{n-1} A + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2^{n-2} A^2$$

Pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} B^n &= 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \cdot 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2^{n-2} \begin{pmatrix} 4+2n & 2n + \frac{n(n-1)}{2} & 4n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 2n & 4 + \frac{n(n-1)}{2} & 2n + \frac{n(n-1)}{2} \\ -2n & -\frac{n(n-1)}{2} & 4 - 2n - \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En simplifiant :

$$\boxed{B^n = 2^{n-2} \begin{pmatrix} 4+2n & \frac{n^2+3n}{2} & \frac{n^2+7n}{2} \\ 2n & \frac{n^2-n+8}{2} & \frac{n^2+3n}{2} \\ -2n & \frac{n-n^2}{2} & \frac{8-n^2-3n}{2} \end{pmatrix}}$$

Pour $n = 0$: $B^0 = I_3$. Pour $n = 1$: $B^1 = B$.

5. Puisque 0 et 1 sont racines, on a

$$P = x(x-1)^2(ax+b)$$

et il nous reste à trouver a et b. On a $P' = (x-1)^2(ax+b) + 2(x-1)x(ax+b) + x(x-1)^2 a$ et les valeurs en -1 donnent le système :

$$\begin{cases} 4a - 4b = 1 \\ 8b - 12a = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

L'unique solution est donc :

$$\boxed{P = -x(x-1)^2(x+\frac{5}{4})}$$

6. a)

$$\begin{aligned} P &= x(x^3+6x^2+3x-10) \quad \text{on constate que 1 est racine évidente} \\ &= x(x-1)(x^2+7x+10) \quad \text{on factorise le trinôme : } \Delta = 49-40 = 9 \\ &= \boxed{x(x-1)(x+2)(x+5)} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} Q &= x(x^4-x^2-6) \quad \text{On pose } X = x^2 \\ &= x(X^2-X-6) \quad \text{on factorise : } \Delta = 1+24 = 25 \\ &= x(X-3)(X+2) \\ &= x(x^2-3)(x^2+2) \\ &= \boxed{x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+2)} \quad \Delta = -8 < 0 \text{ pour le dernier} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} R &= x^4+10x^2+25-4x^2 \\ &= (x^2+5)^2-(2x)^2 \\ &= \boxed{(x^2+2x+5)(x^2-2x+5)} \quad \Delta = 4-20 < 0 \text{ pour les deux} \end{aligned}$$

7. On cherche donc à avoir $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$. On résout donc le système :

$$\begin{cases} a+b+1=0 \\ 4a+3b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$$

On effectue la division euclidienne de ce qu'on a trouvé pour obtenir :

$$\boxed{P = (x-1)^2(3x^2+2x+1)}$$

8. a) On factorise par le terme de plus haut degré en haut et en bas :

$$\frac{2x^4-5x^3+x^2}{3x^4+x^2-7} = \frac{x^4(2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^4(3+\frac{1}{x^2}-\frac{7}{x^4})} \to \boxed{\frac{2}{3}}$$

b) Puisque la limite en haut et en bas est 0, on factorise par $(x-2)$:

- $x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$ (identité remarquable a^3-b^3)
- $x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$ (racines évidentes 2 et -3)

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+4}{x+3} = \frac{4+4+4}{5} = \boxed{\frac{12}{5}}$$

c) Là encore, forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On utilise l'expression conjuguée au numérateur et on factorise le dénominateur :

- $x^3-6x^2+12x-9 = (x-3)(x^2-3x+3)$ (3 est racine évidente)
- $(\sqrt{x^2+2x-6}-3)(\sqrt{x^2+2x-6}+3) = x^2+2x-6-9 = x^2+2x-15 = (x-3)(x+5)$

Donc :

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2+2x-6}-3}{(x-3)(x^2-3x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+5)}{(x-3)(x^2-3x+3)(\sqrt{x^2+2x-6}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+5}{(x^2-3x+3)(\sqrt{x^2+2x-6}+3)} = \frac{8}{3\times 6} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

d) Ce sont des croissances comparées. On factorise par e^{3x} en haut et en bas :

$$\frac{5e^x + x^5 - 3x^2}{e^{3x} + x^4 + \ln^2(x)} = \frac{e^{3x}(\frac{5}{e^{2x}} + \frac{x^5}{e^{3x}} - \frac{3x^2}{e^{3x}})}{e^{3x}(1 + \frac{x^4}{e^{3x}} + \frac{\ln^2(x)}{e^{3x}})} \to \frac{0}{1} = \boxed{0}$$

e) Un théorème des gendarmes, qu'il faut bien rédiger.

On a $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ pour tout $x > 0$, donc par croissance de l'exponentielle :

$$e^{-1} \leq \exp\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \leq e$$

De plus $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc :

$$\frac{e^{-1}-1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\cos(x) + \exp(\sin(\frac{1}{x}))}{\sqrt{x}} \leq \frac{1+e}{\sqrt{x}}$$

Les deux bornes tendent vers 0 quand $x \to +\infty$, donc par le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x) + \exp(\sin(\frac{1}{x}))}{\sqrt{x}} = 0}$$

f) On simplifie d'abord :

$$\tan^2(x) - \sin^2(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} - \sin^2(x) = \sin^2(x)\left(\frac{1}{\cos^2(x)} - 1\right) = \sin^2(x)\cdot\frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^4(x)}{\cos^2(x)}$$

Donc :

$$\frac{\tan^2(x) - \sin^2(x)}{x^4} = \frac{\sin^4(x)}{x^4\cos^2(x)} = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^4 \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} \to 1^4 \times 1 = \boxed{1}$$

Exercice 3 (Polynômes et relation fonctionnelle)

On considère E l'ensemble des polynômes à coefficients réels vérifiant la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x^2) = x^2(x^2+1)P(x) \qquad (*)$$

1. Le polynôme nul est-il solution de $(*)$? Et le polynôme $x \mapsto x^3 + x$?
2. Analyse du problème : soit P un polynôme non nul de E, donc vérifiant $(*)$.
   a) Donner les degrés possibles de P.
   b) Montrer que 0, 1, -1 sont racines de P.
   c) En dérivant $(*)$ (attention à la dérivée de $x \mapsto P(x^2)$), montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$2P'(x^2) = 2(x^2+1)P(x) + 2x^2P(x) + x(x^2+1)P'(x)$$
   d) Montrer alors que 0 est racine de P'.

e) En déduire qu'il existe un réel a tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2(x-1)(x+1)$.

3. Synthèse : déterminer tous les polynômes de l'ensemble E.

1. **Polynôme nul :** Pour $P = 0$, on a $P(x^2) = 0$ et $x^2(x^2+1)P(x) = 0$, donc l'égalité est vérifiée.

   Le polynôme nul est solution de $(*)$.

   Polynôme $P(x) = x^3 + x$: On calcule :

   - $P(x^2) = (x^2)^3 + x^2 = x^6 + x^2$
   - $x^2(x^2+1)P(x) = x^2(x^2+1)(x^3+x) = x^2(x^2+1) \cdot x(x^2+1) = x^3(x^2+1)^2$

     Or $(x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$, donc $x^3(x^2+1)^2 = x^7 + 2x^5 + x^3$.

   On a $x^6 + x^2 \neq x^7 + 2x^5 + x^3$ (les degrés sont différents).

   Le polynôme $x \mapsto x^3 + x$ n'est pas solution de $(*)$.

2. **Analyse :** Soit P un polynôme non nul vérifiant $(*)$.

   a) **Degré de P :** En comparant les degrés des deux membres de $(*)$:

   - Membre de gauche : $\deg(P(x^2)) = 2\deg(P)$
   - Membre de droite : $\deg(x^2(x^2+1)P(x)) = 2 + 2 + \deg(P) = 4 + \deg(P)$

   On obtient $2\deg(P) = 4 + \deg(P)$, soit $\deg(P) = 4$.

   b) **Racines de P :**

   - En $x = 0$: $(*)$ donne $P(0) = 0 \cdot 1 \cdot P(0) = 0$. Donc 0 est racine de P.
   - En $x = 1$: $(*)$ donne $P(1) = 1 \cdot 2 \cdot P(1) = 2P(1)$, soit $P(1) = 0$. Donc 1 est racine de P.
   - En $x = -1$: $(*)$ donne $P(1) = 1 \cdot 2 \cdot P(-1) = 2P(-1)$. Comme $P(1) = 0$, on a $P(-1) = 0$. Donc -1 est racine de P.

   c) **Dérivation de $(*)$:** Pour le membre de gauche, on utilise la dérivée d'une composée : si $Q(x) = P(x^2)$, alors $Q'(x) = 2x \cdot P'(x^2)$.

   Pour le membre de droite, on dérive le produit $S(x) = x^2(x^2+1)P(x)$:

$$\begin{aligned} S'(x) &= 2x(x^2+1)P(x) + x^2 \cdot 2x \cdot P(x) + x^2(x^2+1)P'(x) \\ &= 2x(x^2+1)P(x) + 2x^3P(x) + x^2(x^2+1)P'(x) \end{aligned}$$

   On obtient donc :

$$\boxed{2xP'(x^2) = 2x(x^2+1)P(x) + 2x^3P(x) + x^2(x^2+1)P'(x)}$$

   Ce n'est pas l'égalité demandée dans votre sujet. Celle de votre énoncé est fausse! il y a un x en trop à gauche. Je l'ai corrigée ici. L'idée est de diviser notre égalité par x (pour $x \neq 0$) pour retrouver l'égalité de l'énoncé.

   Pour $x = 0$, les deux membres valent 0, donc l'égalité est aussi vérifiée en $x = 0$.

   d) **0 est racine de P' :** En évaluant l'égalité précédente en $x = 0$:

$$2P'(0) = 2 \cdot 1 \cdot P(0) + 0 + 0 = 2P(0) = 0$$

   Donc $P'(0) = 0$, c'est-à-dire 0 est racine de P'.

   e) **Forme de P :** On sait que :

- $\deg(P) = 4$
- 0, 1, -1 sont racines de P
- 0 est racine de P'

Puisque 0 est racine de P et de P', 0 est racine au moins double de P.

Donc P s'écrit $P(x) = x^2Q(x)$ où $\deg(Q) = 2$ et Q admet 1 et -1 comme racines.

Ainsi $Q(x) = a(x-1)(x+1)$ pour un certain $a \in \mathbb{R}^*$.

Finalement :

$$\boxed{P(x) = ax^2(x-1)(x+1) = ax^2(x^2-1) = ax^4 - ax^2}$$

3. **Synthèse :** Vérifions que $P(x) = ax^2(x-1)(x+1)$ est bien solution de $(*)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

   On a $P(x) = ax^4 - ax^2$, donc :
   - $P(x^2) = a(x^2)^4 - a(x^2)^2 = ax^8 - ax^4$
   - $x^2(x^2+1)P(x) = x^2(x^2+1)(ax^4 - ax^2) = ax^2(x^2+1) \cdot x^2(x^2-1)$
     $= ax^4(x^2+1)(x^2-1) = ax^4(x^4-1) = ax^8 - ax^4$

   Les deux expressions sont égales, donc P est bien solution de $(*)$.

$\boxed{E = \{x \mapsto ax^2(x-1)(x+1),\ a \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto ax^4 - ax^2,\ a \in \mathbb{R}\}}$

Exercice 4 (Suites et analyse numérique)
Partie I
On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par : $f(x) = \frac{1}{x+1}$

1. Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ admet une unique solution positive que l'on notera r_2 et vérifier que $r_2 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.
2. Vérifier que $f(r_2) = r_2$.
3. Vérifier que pour tout $(a,b) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]^2$, $|f(b) - f(a)| \leq \frac{4}{9}|b-a|$.
4. On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Écrire une fonction python d'en-tête `def suite(n) :` qui renvoie la valeur de u_n.
   b) Montrer que pour tout entier n, $u_n \in [1/2, 1]$.
   c) Prouver alors: $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9}|u_n - r_2|$ puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.
   d) La suite u converge-t-elle? Si oui, déterminer sa limite.
   e) Écrire alors un programme python qui donne une valeur approchée de r_2 à 10^{-3} près.

Partie II
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note f_N la fonction polynôme définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_N(x) = x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - 1$.

5. Ecrire une fonction python qui représente graphiquement la fonction f_N pour un entier N donné en paramètre d'entrée sur l'intervalle [0,10].
6. Montrer que f_N est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
7. Montrer que l'équation $f_N(x) = 0$ possède une unique solution positive, que l'on notera x_N. Vérifier que $x_N \in [0,1]$.

8. Montrer la relation (*) : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-1)f_N(x) = x^{N+1} - 2x + 1$

9. Déterminer le signe de $f_{N+1}(x) - f_N(x)$ pour $x \in [0,1]$.

10. En déduire que la suite $(x_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

11. Montrer que la suite (x_N) converge vers un nombre $x^* \in [0,1]$.

12. Montrer que pour tout entier $N \geq 2$, $0 < x_N \leq r_2$ où le réel r_2 a été introduit partie I. En déduire : $\lim_{N\to+\infty}(x_N)^N = 0$.

13. À l'aide de la relation (*), déterminer la valeur de x^*.

Partie I

1. **Deux versions : une faisable dès maintenant** : On calcule $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$$

On retient la solution positive r_2. On vérifie que $r_2 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$:

$$r_2 - \frac{1}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-2+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-2}{2} > 0$$

car $\sqrt{5} > 2$. De plus :

$$1 - r_2 = 1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2+1-\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} > 0$$

car $\sqrt{5} < 3$.

Et une deuxième avec la continuité : Soit $g(x) = x^2 + x - 1$. On a $g'(x) = 2x + 1 > 0$ pour $x \geq 0$, donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

De plus, $g(0) = -1 < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet $\boxed{\text{une unique solution positive } r_2}$.

Vérification : $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4} < 0$ et $g(1) = 1 + 1 - 1 = 1 > 0$.

Donc $\boxed{r_2 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[}$.

Remarque : On peut calculer $r_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or moins 1).

2. On a $r_2^2 + r_2 - 1 = 0$, soit $r_2^2 + r_2 = 1$, donc :

$$f(r_2) = \frac{1}{r_2+1} = \frac{1}{r_2+1} \cdot \frac{r_2}{r_2} = \frac{r_2}{r_2(r_2+1)} = \frac{r_2}{r_2^2+r_2} = \frac{r_2}{1} = r_2$$

$\boxed{f(r_2) = r_2}$, donc r_2 est un point fixe de f.

3. Pour $(a,b) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]^2$:

$$|f(b) - f(a)| = \left|\frac{1}{b+1} - \frac{1}{a+1}\right| = \left|\frac{a-b}{(a+1)(b+1)}\right| = \frac{|b-a|}{(a+1)(b+1)}$$

Sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on a $a+1 \geq \frac{3}{2}$ et $b+1 \geq \frac{3}{2}$, donc $(a+1)(b+1) \geq \frac{9}{4}$.

Ainsi : $|f(b) - f(a)| \leq \frac{|b-a|}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}|b-a|$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^+$.

$\boxed{|f(b) - f(a)| \leq \frac{4}{9}|b-a|}$

4. a) Programme Python :

```
def suite(n):
    u = 1
    for i in range(n):
        u = 1/(u+1)
    return u
```

b) Montrons par récurrence que $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $u_0 = 1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. ✓

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Alors $u_n + 1 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$, donc :

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 1} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

On a encore utilisé la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^+$.

Conclusion : Par application du principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].}$

c) Puisque u_n et $r_2 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et $f(r_2) = r_2$, on applique la question 3 :

$$|u_{n+1} - r_2| = |f(u_n) - f(r_2)| \leq \frac{4}{9}|u_n - r_2|$$

Par récurrence immédiate (que vous devez rédiger!) :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |u_0 - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n}$

d) Puisque $0 < \frac{4}{9} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$.

Par encadrement : $0 \leq |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n \to 0$.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } r_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.}$

e) En utilisant l'inégalité $|u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n < 10^{-3}$:

```
def approx_r2():
    u = 1
    n = 0
    while (4/9)**n >= 0.001:
        n += 1
        u = 1/(u+1)
    return u
```

Partie II

5. Programme Python pour représenter f_N :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def trace_fN(N):
    x = np.linspace(0, 10, 1000)
    y = sum(x**k for k in range(1, N+1)) - 1
    plt.plot(x, y)
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('f_N(x)')
    plt.title('Graphe de f')
    plt.show()
```

6. On a $f_N(x) = \sum_{k=1}^{N} x^k - 1$, donc $f'_N(x) = \sum_{k=1}^{N} kx^{k-1}$.

   Pour $x > 0$, tous les termes sont strictement positifs, donc $f'_N(x) > 0$.

   Pour $x = 0$, $f'_N(0) = 1 > 0$.

   $\boxed{f_N \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+.}$

7. On a $f_N(0) = -1 < 0$ et $f_N(1) = N - 1 \geq 0$ (égal à 0 si $N = 1$, positif sinon).

   Par le TVI et la stricte croissance, $f_N(x) = 0$ admet $\boxed{\text{une unique solution positive } x_N}$.

   Comme $f_N(0) < 0$ et $f_N(1) \geq 0$, on a $\boxed{x_N \in [0, 1]}$ (plus précisément $x_N \in]0, 1]$).

8. On calcule $(x-1)f_N(x) = (x-1)\sum_{k=1}^{N} x^k - (x-1)$.

   Or

   $$(x-1)\sum_{k=1}^{N} x^k = \sum_{k=1}^{N} x^{k+1} - \sum_{k=1}^{N} x^k = \sum_{k=2}^{N+1} x^k - \sum_{k=1}^{N} x^k = x^{N+1} - x$$

   (somme télescopique).

   Donc $(x-1)f_N(x) = x^{N+1} - x - (x-1) = x^{N+1} - x - x + 1 = \boxed{x^{N+1} - 2x + 1}$.

9. On a $f_{N+1}(x) - f_N(x) = x^{N+1}$.

   Pour $x \in [0, 1]$, $x^{N+1} \geq 0$, donc $\boxed{f_{N+1}(x) - f_N(x) \geq 0}$ (égalité ssi $x = 0$).

10. On a $f_{N+1}(x_N) = f_N(x_N) + x_N^{N+1} = 0 + x_N^{N+1} > 0$ (car $x_N > 0$).

    Donc $f_{N+1}(x_N) > 0 = f_{N+1}(x_{N+1})$.

    Comme f_{N+1} est strictement croissante, on en déduit $x_N > x_{N+1}$.

    $\boxed{\text{La suite } (x_N)_{N\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$

11. La suite $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc $\boxed{\text{elle converge vers une limite } x^* \in [0, 1].}$

12. Pour $N \geq 2$, on a $f_N(x) = x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - 1$.

    On remarque que $f_2(x) = x^2 + x - 1$, donc $x_2 = r_2$.

    Comme $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est décroissante, pour $N \geq 2$: $x_N \leq x_2 = r_2$.

    Donc $0 < x_N \leq r_2 < 1$, et ainsi $0 < x_N^N \leq r_2^N$ car la fonction $x \mapsto x^N$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

    Comme $0 < r_2 < 1$, on a $\lim\limits_{N\to+\infty} r_2^N = 0$.

    Par encadrement : $\boxed{\lim\limits_{N\to+\infty} x_N^N = 0.}$

13. On utilise la relation $(*)$: $(x_N - 1)f_N(x_N) = x_N^{N+1} - 2x_N + 1$.

    Comme $f_N(x_N) = 0$, on a $x_N^{N+1} - 2x_N + 1 = 0$, soit $x_N^{N+1} = 2x_N - 1$.

    En passant à la limite quand $N \to +\infty$:

- $x_N^{N+1} = x_N \cdot x_N^N \to x^* \cdot 0 = 0$
- $2x_N - 1 \to 2x^* - 1$

Donc $0 = 2x^* - 1$, soit $\boxed{x^* = \frac{1}{2}}$.

Exercice 5 (Puissances de matrices et probabilités) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A n'est pas inversible.
2. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que : $A^3 = \alpha A + \beta A^2$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux réels, notés a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n A^2$.
4. Écrire une fonction Python qui au paramètre d'entrée n renvoie les valeurs de a_n et b_n.
5. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+2} = 2b_{n+1} + 8b_n$.
   b) A l'aide de la relation obtenue au a), écrire une autre fonction Python qui au paramètre d'entrée $n \in \mathbb{N}^*$ renvoie la valeur de b_n ainsi que celle de la somme $\sum_{k=1}^{n} b_k$.
   c) Déduire du a) l'expression de b_n en fonction de n, puis celle de a_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

On dispose de deux sacs S_1 et S_2 contenant chacun initialement un jeton numéroté 0 et un jeton numéroté 1. On effectue une succession d'échanges d'un jeton du sac S_1 avec un jeton du sac S_2. Ainsi, il y a toujours deux jetons dans chaque sac.
On introduit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- A_n : "à l'issue du n^{e} échange, le sac S_1 contient deux jetons 0"
- B_n : "à l'issue du n^{e} échange, le sac S_1 contient un jeton 0 et un jeton 1"
- C_n : "à l'issue du n^{e} échange, le sac S_1 contient deux jetons 1"

On convient que pour $n = 0$, $P(B_0) = 1$, et $P(A_0) = P(C_0) = 0$, et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}.$$

6. Déterminer (en justifiant) $P(A_1)$, $P(B_1)$ et $P(C_1)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier soigneusement que $X_{n+1} = \frac{1}{4} A X_n$.
8. Exprimer alors X_n en fonction de X_0 et A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9. Calculer AX_0 et $A^2 X_0$.
10. Déduire des questions précédentes $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$ pour tout entier n.

1. La première et la troisième ligne de A sont identiques (toutes deux égales à $(0, 1, 0)$). Donc le rang du système associé est inférieur à 3, ce qui implique que A n'est pas inversible.

2. Calculons d'abord A^2 :

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 8 & 12 & 8 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Puis A^3 :

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 8 & 12 & 8 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 8 \\ 48 & 40 & 48 \\ 8 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Vérifions que $A^3 = \alpha A + \beta A^2$:

$$\alpha A + \beta A^2 = \begin{pmatrix} 4\beta & \alpha + 2\beta & 4\beta \\ 4\alpha + 8\beta & 2\alpha + 12\beta & 4\alpha + 8\beta \\ 4\beta & \alpha + 2\beta & 4\beta \end{pmatrix}$$

Par identification avec A^3, on obtient le système :

$$\begin{cases} 4\beta = 8 \\ \alpha + 2\beta = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 8 \end{cases}$$

On vérifie que les autres équations sont satisfaites. Donc $\boxed{\alpha = 8 \text{ et } \beta = 2}$, i.e. $A^3 = 8A + 2A^2$.

3. Montrons ce résultat par récurrence :

Initialisation : Pour $n = 1$, $A^1 = 1 \cdot A + 0 \cdot A^2$ donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

Pour $n = 2$, $A^2 = 0 \cdot A + 1 \cdot A^2$ donc $a_2 = 0$ et $b_2 = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'il existe a_n, b_n tels que $A^n = a_n A + b_n A^2$.

Alors :

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = A(a_n A + b_n A^2) = a_n A^2 + b_n A^3 = a_n A^2 + b_n(8A + 2A^2) = 8b_n A + (a_n + 2b_n)A^2$$

Donc $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}A^2$ avec $\boxed{a_{n+1} = 8b_n}$ et $\boxed{b_{n+1} = a_n + 2b_n}$.

Conclusion : Par application du principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ il existe } a_n, b_n \text{ tels que } A^n = a_n A + b_n A^2.}$

4.
```python
def calcul_an_bn(n):
    a, b = 1, 0  # a_1 = 1, b_1 = 0
    for _ in range(n - 1):
        a, b = 8 * b, a + 2 * b
    return a, b
```

5. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $a_{n+1} = 8b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$.

Donc

$$b_{n+2} = a_{n+1} + 2b_{n+1} = 8b_n + 2(a_n + 2b_n) = 2a_n + 12b_n.$$

Or $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ donc $a_n = b_{n+1} - 2b_n$.

D'où

$$b_{n+2} = 2(b_{n+1} - 2b_n) + 12b_n = 2b_{n+1} + 8b_n.$$

Ainsi $\boxed{b_{n+2} = 2b_{n+1} + 8b_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) **Fonction Python avec somme.**

```python
def calcul_bn_somme(n):
    if n == 1:
        return 0, 0
    b_prev, b_curr = 0, 1  # b_1 = 0, b_2 = 1
    S = 0 + 1  # somme partielle
    for k in range(3, n + 1):
        b_new = 2 * b_curr + 8 * b_prev
        S += b_new
        b_prev, b_curr = b_curr, b_new
    return b_curr, S
```

c) Le polynôme caractéristique de $b_{n+2} = 2b_{n+1} + 8b_n$ est $r^2 = 2r + 8$, soit $r^2 - 2r - 8 = 0$.

Par les coefficients racines ou par $\Delta = 4 + 32 = 36$, on trouve les racines $r_1 = \frac{2+6}{2} = 4$ et $r_2 = \frac{2-6}{2} = -2$.

Puisqu'il y a deux racines distinctes, on sait que :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \lambda \cdot 4^n + \mu \cdot (-2)^n.$$

Conditions initiales : $b_1 = 0$ et $b_2 = 1$.

$$\begin{cases} 4\lambda - 2\mu = 0 \\ 16\lambda + 4\mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\mu}{2} \\ 8\mu + 4\mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{1}{12} \\ \lambda = \frac{1}{24} \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{4^n}{24} + \frac{(-2)^n}{12} = \frac{4^n + 2 \cdot (-2)^n}{24}}.$$

Expression de a_n :

On a $a_n = b_{n+1} - 2b_n$ pour $n \geq 1$. Donc :

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n+1} - 2b_n \\ &= \frac{4^{n+1} + 2(-2)^{n+1}}{24} - 2 \cdot \frac{4^n + 2(-2)^n}{24} \\ &= \frac{4 \cdot 4^n - 4(-2)^n - 2 \cdot 4^n - 4(-2)^n}{24} \\ &= \frac{2 \cdot 4^n - 8(-2)^n}{24} \\ &= \frac{4^n - 4(-2)^n}{12} \\ &= \frac{4^n - (-2)^{n+2}}{12} \end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$: $\boxed{a_n = \frac{4^n - (-2)^{n+2}}{12} = \frac{4^{n-1} - (-2)^n}{3}}$.

6. À l'état initial ($n = 0$), le sac S_1 contient un jeton 0 et un jeton 1 (événement B_0).

   Lors du premier échange, on tire un jeton au hasard de S_1 (2 choix équiprobables) et un de S_2 (2 choix équiprobables), donc 4 issues équiprobables. Dans tout le reste de l'exercice, j'utiliserai le fait que les tirages dans les sacs S_1 et S_2 sont indépendants.

   - A_1 (deux jetons 0 dans S_1) : on retire le jeton 1 de S_1 et on prend le jeton 0 de S_2. Probabilité : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
   - C_1 (deux jetons 1 dans S_1) : on retire le jeton 0 de S_1 et on prend le jeton 1 de S_2. Probabilité : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
   - B_1 : dans les deux autres cas (on échange deux 0 ou deux 1). Probabilité : $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

   Donc $\boxed{P(A_1) = \frac{1}{4}, \quad P(B_1) = \frac{1}{2}, \quad P(C_1) = \frac{1}{4}}$.

7. Soit $n \geq 1$. Par la formule des probabilités totales, (A_n, B_n, C_n) formant un système complet d'événements :

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n)$$

   Calcul des probabilités conditionnelles :

   - Si A_n (deux 0 dans S_1) : pour obtenir A_{n+1}, on doit échanger un 0 contre un 0. Donc : $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 \times 0 = 0$.
   - Si B_n (un 0 et un 1 dans S_1) : pour obtenir A_{n+1}, on sort le 1 de S_1 et on prend le 0 de S_2. Donc : $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
   - Si C_n (deux 1 dans S_1) : impossible d'obtenir A_{n+1}. Donc : $P_{C_n}(A_{n+1}) = 0$.

   Donc $P(A_{n+1}) = 0 \cdot P(A_n) + \frac{1}{4}P(B_n) + 0 \cdot P(C_n) = \frac{1}{4}P(B_n)$.

   De même :

   - $P(B_{n+1}) = P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n) + P(C_n)$ (les états A_n et C_n vont forcément vers B_{n+1}, et depuis B_n on a prob $\frac{1}{2}$ de rester).
   - $P(C_{n+1}) = 0 \cdot P(A_n) + \frac{1}{4}P(B_n) + 0 \cdot P(C_n) = \frac{1}{4}P(B_n)$.

   Donc :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} P(A_{n+1}) \\ P(B_{n+1}) \\ P(C_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}P(B_n) \\ P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n) + P(C_n) \\ \frac{1}{4}P(B_n) \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{4}AX_n}$$

8. Par récurrence immédiate à partir de $X_{n+1} = \frac{1}{4}AX_n$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \frac{1}{4^n}A^n X_0}$$

   Je vous laisse l'écrire au propre, on en a déjà fait plein!

9. On a $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$AX_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$A^2X_0 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 8 & 12 & 8 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

10. On a $X_n = \frac{1}{4^n} A^n X_0 = \frac{1}{4^n}(a_n A + b_n A^2) X_0 = \frac{1}{4^n}(a_n A X_0 + b_n A^2 X_0)$.

    Donc :

$$X_n = \frac{1}{4^n}\left(a_n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b_n \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} a_n + 2b_n \\ 2a_n + 12b_n \\ a_n + 2b_n \end{pmatrix}$$

    Avec $a_n = \frac{4^{n-1} - (-2)^n}{3}$ et $b_n = \frac{4^n + 2(-2)^n}{24}$:

$$a_n + 2b_n = \frac{4^{n-1} - (-2)^n}{3} + \frac{4^n + 2(-2)^n}{12} = \frac{4 \cdot 4^{n-1} - 4(-2)^n + 4^n + 2(-2)^n}{12} = \frac{2 \cdot 4^n - 2(-2)^n}{12} = \frac{4^n}{}$$

$$2a_n + 12b_n = \frac{2(4^{n-1} - (-2)^n)}{3} + \frac{4^n + 2(-2)^n}{2} = \frac{4(4^{n-1} - (-2)^n) + 3(4^n + 2(-2)^n)}{6} = \frac{4^n - 4(-2)^n +}{}$$

    Finalement :

$$\boxed{P(A_n) = P(C_n) = \frac{4^n - (-2)^n}{6 \cdot 4^n} = \frac{1}{6}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

$$\boxed{P(B_n) = \frac{4 \cdot 4^n + 2(-2)^n}{6 \cdot 4^n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

    Vérification : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = \frac{2}{6}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ ✓

    Limites (en bonus) : Quand $n \to +\infty$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, donc $P(A_n) \to \frac{1}{6}$, $P(B_n) \to \frac{2}{3}$, $P(C_n) \to \frac{1}{6}$.

Exercice 6 (Polynômes interpolateurs de Lagrange)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n réels deux à deux distincts. On considère la famille de polynômes $(L_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définie par:

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad L_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

1. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer le degré de L_i, les racines de L_i et $L_i(x_i)$.
2. Montrer que : $\sum_{j=1}^{n} L_j = 1$.
3. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. Montrer que : $P = \sum_{j=1}^{n} P(x_j) L_j$.
4. Exemple d'utilisation des polynômes interpolateurs de Lagrange. On souhaite déterminer une fonction polynomiale f dont la courbe passe par les trois points $A(2,3)$, $B(4,2)$ et $C(5,4)$. D'après ce qui précède, on sait qu'il existe effectivement une fonction f de degré inférieur ou égal à 2 répondant au problème.
   a) Posons : $x_1 = 2, x_2 = 4$ et $x_3 = 5$. Calculer L_1, L_2, L_3.

b) Posons : $y_1 = 3, y_2 = 2$ et $y_3 = 4$. Considérons le polynôme :

$$f = y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3$$

Que vaut $f(x_i)$ pour $i = 1, 2$ et 3 ?

c) Simplifier $f(x)$.

Bon courage à tous et toutes!