Devoir Surveillé 2 Version Facile
Systèmes, Polynômes, Limites

La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Exercice 1 (Questions de cours)

- Rappeller la définition d'une racine d'un polynôme. Quelle propriété vérifient les racines d'un polynôme? Démontrer ce résultat.
- Rappeller et démontrer la formule : $(A+B)^n = \cdots$ dans le cas des matrices.
- Écrire un programme calculant $\sum_{0\leq i\leq j\leq n} 2^{i+j}$, calculer cette somme mathématiquement.
- Théorème limite et suite (vous pouvez le prouver avec a et b de votre choix)

Exercice 2 (Des exercices proches du cours ou du DS précédent)

1. En précisant soigneusement les ensembles de définition et de résolution, résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle :

   a) $|2x-1| = x+3$
   b) $\sqrt{3x+7} = x+1$.
   c) $\ln(3) + \ln(x^2+x) - \ln(2x+2) = 0$.
   d) $3e^{2x} + 6e^x = 9$.
   e) $\ln(x^2-3x+2) \geq 0$
   f) $\sqrt{2x+1} + 2x^2 \geq 35$

2. Étant donné A, B et C trois parties de E, justifier l' équivalence suivante :

$$A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$$

3. Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système ci dessous :

$$S_3 : \begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$

4. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Calculez, pour tout entier n, A^n et en déduire B^n.

5. Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}_4[x]$ tels que :

$$P(0) = 0;\ P(1) = 0;\ P(-1) = 1;\ P'(1) = 0;\ P'(-1) = 2.$$

On pourra donner la réponse sous forme factorisée.

6. Donner la factorisation des polynômes suivants :

a) $P = x^4+6x^3+3x^2-10x$, b) $Q = x^5 - x^3 - 6x$, c) $R = x^4 + 6x^2 + 25$.

7. Trouver les réels a et b tels que $(X-1)^2$ divise $aX^4 + bX^3 + 1$, et factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme obtenu.

8. Calculez les limites suivantes:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4-5x^3+x^2}{3x^4+x^2-7}$ c) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2+2x-6}-3}{x^3-6x^2+12x-9}$ e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)+\exp(\sin(\frac{1}{x}))}{\sqrt{x}}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2+x-6}$ d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5e^x+x^5-3x^2}{e^{3x}+x^4+\ln^2(x)}$ f) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2(x)-\sin^2(x)}{x^4}$

Exercice 3 (Polynômes et relation fonctionnelle)
On considère E l'ensemble des polynômes à coefficients réels vérifiant la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x^2) = x^2(x^2+1)P(x) \qquad (*)$$

1. Le polynôme nul est-il solution de $(*)$? Et le polynôme $x \mapsto x^3 + x$?

2. Analyse du problème : soit P un polynôme non nul de E, donc vérifiant $(*)$.

a) Donner les degrés possibles de P.

b) Montrer que 0, 1, -1 sont racines de P.

c) En dérivant $(*)$ (attention à la dérivée de $x \mapsto P(x^2)$), montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2xP'(x^2) = 2(x^2+1)P(x) + 2x^2P(x) + x(x^2+1)P'(x)$$

d) Montrer alors que 0 est racine de P'.

e) En déduire qu'il existe un réel a tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2(x-1)(x+1)$.

3. Synthèse : déterminer tous les polynômes de l'ensemble E.

Exercice 4

1. Soit la fonction polynomiale h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$.

a) Factoriser h.

b) En déduire le signe de h sur $\mathbb{R}^+$.

2. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x\ln(x)}$

a) Donner l'ensemble de définition de f, que l'on notera $\mathcal{D}_f$.

b) Montrer que f se prolonge par continuité en 1.

c) Déterminer la limite de f en 0. Interprétation graphique?

d) Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis celle de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$

e) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ et montrer que le signe de $f'(x)$ est celui de

$$g(x) = \ln(x) - \frac{x^2+x-2}{x^2+2}.$$

f) Calculer g' sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que le signe de $g'(x)$ est celui de $h(x)$.

g) Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

h) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ admet une unique solution que l'on notera α.

i) Dresser le tableau de variations de f en fonction de α.

j) Donner l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 5 (ECRICOME ECT 2023) *Assez facile, vous pouvez viser les autres exercices si vous vous sentez à l'aise*

Partie 1

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\begin{cases} u_1 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{5}{12}u_n + \dfrac{1}{3} \end{cases}$

1. Compléter la fonction en langage Python suivante, qui prend en entrée un entier naturel non nul **n** et un réel **u1** de $[0,1]$ correspondant au terme initial u_1 de la suite, et renvoie le terme u_n.

```
import numpy as np

def suite(n,u1):
    u=u1
    for k in range(..):
      u=.....................
    return u
```

2. Donner l'expression du terme général de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ en fonction de n et de u_1.

Partie 2

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. On note $X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer AX_1 et AX_2.

4. Montrer que P est inversible et donner son inverse. (*On vérifiera que* $P^{-1} = Q$.)

5. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

6. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   a) Calculer $P^{-1}X$

   b) En déduire l'expression de A^nX pour tout entier naturel n.

Partie 3

Un client d'une agence de voyages cherche à prévoir ses vacances au soleil pour l'hiver (entre décembre et février) et à éviter la pluie. Sur la destination souhaitée, on suppose que soit il pleut, soit il fait beau.

On sait de plus que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

- S'il fait beau un certain jour n, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $\dfrac{3}{4}$.

- S'il pleut un certain jour n, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $\frac{1}{3}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

- A_n l'événement : ńIl fait beau le jour n ż, et a_n la probabilité $P(A_n)$.
- B_n l'événement : ńIl pleut le jour n ż, et b_n la probabilité $P(B_n)$.

On suppose que le jour 1 , àă savoir le 1er décembre, il fait beau. Donc $a_1 = P(A_1) = 1$.

7. Déterminer b_1, a_2, b_2.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Montrer que $P(A_{n+1}) = \frac{3}{4}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n)$ et que $P(B_{n+1}) = \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{2}{3}P(B_n)$.
   b) En déduire que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ où $M = \frac{1}{12}A$.
   c) Justifier que $a_n + b_n = 1$.

9. a) Exprimer, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ en fonction de M et n.
   b) En déduire l'expression de a_n et de b_n en fonction de n.

10. On se propose, dans cette question, de trouver le terme général de $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et de $(b_n)_{n\geqslant 1}$ d'une manière différente.
    a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{5}{12}a_n + \frac{1}{3}$
    b) En utilisant la partie 1, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$
    c) En déduire l'expression de b_n en fonction de n.

11. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

12. Le client doit partir le 1er décembre, pour un séjour de 10 jours (du 1er décembre au 10 décembre).
    a) Quelle est la probabilité qu'il fasse beau durant les 9 premiers jours et qu'il pleuve le dernier jour?
    b) Quelle est la probabilité que le voyageur reparte sous la pluie, c'est-à-dire qu'il pleuve le jour 10 ?

Bon courage à tous et toutes!