La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laisser une marge à gauche et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Exercice 1 : Questions de cours

1. **Compléter les primitives suivantes :**
   Soit u une fonction dérivable.

expression	Primitive (à une constante près)
$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	
$\dfrac{u'}{u}$	
$\dfrac{u'}{u^2}$	
$\dfrac{u'}{u^n}$ (avec $n \geq 2$)	
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	
$u'u^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$	
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	
$u'\cos(u)$	
$u'\sin(u)$	
$u'f'(u)$	

2. Donner la définition de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire discrète. Rappeler leurs valeurs pour la loi binomiale et démontrer le résultat pour l'espérance.
3. Énoncer et démontrer le lien entre monotonie et fonction dérivable (dans le cas de la stricte monotonie la preuve n'est pas exigée).
4. Donner la définition de trois différentes limites (au moins une fonction et une suite). Vous pourrez faire un dessin pour illustrer la situation.

Exercice 2 : des questions proches du cours

1. Calculez les limites suivantes :

   a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - 6x + 8}{x^2 - 3x + 2}$

   b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 2} - 2}{x^3 + 3x^2 + 5x + 3}$

   c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\exp(\cos(x))}{x}$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \exp\left(\dfrac{x\ln(1+x)}{\sin x^2}\right)$

2. Donner si possible un équivalent des fonctions suivantes au point considéré et préciser les limites en ce point :

a) $\dfrac{x^2+2x^3-2x^5}{7x-3x^4+8x^5}$ en $+\infty$

b) $\dfrac{3x^3+e^x+2}{e^{2x}+\ln(x)+x^5}$ en $+\infty$

c) $b(x)=x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ en $+\infty$

d) $d(x)=\dfrac{(x+1)^x-1}{x}$ en 0

e) $e(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ en 0

f) $i(x)=\dfrac{\ln\left(\cos^2(x)\right)}{x^2}$ en 0

3. Un météorologue étudie la météo dans une région. Il observe que : s'il fait beau un jour, il pleut le lendemain avec la probabilité 1/3. S'il pleut un jour, il pleut encore le lendemain avec la probabilité 2/3. On note p_n la probabilité qu'il pleuve le n-ème jour.
Déterminez p_{n+1} en fonction de p_n, puis p_n en fonction de p_1 et n et déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

4. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies conjointement par $u_0=1$ et $v_0=3$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$u_{n+1}=\frac{2u_n+3v_n}{5} \qquad v_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}$$
   a) Écrire un programme Python qui calcule les $n$ièmes termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) Écrire un programme Python qui représente les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour n allant de 0 à 20, (Bonus : en rouge et bleu, avec une légende).
   c) Exprimez le terme général de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $s_n=u_n-v_n$. Que peut-on en déduire sur la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   d) On pose, pour tout entier n, $s_n=u_n+v_n$. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence suivante : $s_{n+1}=s_n-\dfrac{2}{5}d_n$.
   e) En déduire une expression de s_n en fonction de n.
   Indication : on pourra faire apparaître une somme télescopique.
   f) En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n, puis leurs limites.

5. Calculez les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\ln(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2\sin(x)\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\cos^3(x)\,dx$ (poser $u=\cos(x)$)

h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ (poser $u=4-x^2$)

Exercice 3 : Étude d'une suite implicite

Les deux parties sont très largement indépendantes.

Partie I

On pose pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $g(x)=x\ln(x)$.

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer g'.
2. Dresser le tableau de variations complet de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que g réalise une bijection de $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right[$ sur un intervalle J à déterminer.
4. On note g^{-1} sa bijection réciproque.
   a) Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur J.

b) Dresser le tableau de variations complet de g^{-1}.

c) Calculer $g^{-1}(0)$ puis $\left(g^{-1}\right)'(0)$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution x_n sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$, puis vérifier que $x_n \geq 1$.

6. Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il affiche une valeur approchée de x_n à 10^{-3} :

```
import numpy as np
def approx_x_n(n):
    x=1
    while - - - - - -:
        x=x+0.001
    return(x)
```

7. a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

c) En revenant à la définition de x_n, montrer que $\ln(x_n) + \ln(\ln(x_n)) = \ln(n)$.

d) En déduire $\ln(x_n) \sim \ln n$.

e) Déterminer alors un équivalent de x_n.

Partie II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit $f_n(x) = \begin{cases} xe^{-n/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

8. Montrer que f_n est continue sur $[0, +\infty[$.

9. Montrer que f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$.

10. Dresser le tableau de variations complet de f_n sur $[0, +\infty[$.

11. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) - x = -n$. Interpréter graphiquement.

12. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est x_n où x_n est le réel défini partie I.

Dorénavant, et jusqu'à la fin de l'exercice, on pose $n = 1$ et on note f la fonction f_1 définie ci-dessus.

13. a) Dessiner l'allure de f sur $\mathbb{R}_+$, en précisant sa tangente en 0 et en utilisant le résultat de 10.

b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.

c) Montrer que f' est continue sur $[0, 1]$.

d) Calculer pour tout $x \in]0, 1[$, $f''(x)$.

e) Montrer alors que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{e}$

14. On définit alors la suite v par : $v_0 \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.

a) i. Ecrire une fonction python qui au réel $x \in \mathbb{R}^+$associe le réel $f(x)$.

ii. Ecrire une fonction python d'en-tête def v(n, a) : qui renvoie la valeur de v_n lorsque $v_0 = a$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0, 1]$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_{n+1}| \leq \frac{2}{e}|v_n|$.

d) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$.

e) Qu'en déduit-on ?

Exercice 4 : Fonctions génératrices

Pour X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$, on appelle fonction génératrice la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$$

où $p_k = P(X = k)$.

1. Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p ; une loi binomiale de paramètres n et p.
2. Démontrer que deux variables aléatoires discrètes finies X et Y ont même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.
3. Montrer que $E(X) = G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$. Retrouver l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
4. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes finies indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$. Retrouver alors la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales respectives $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$. Quelle est la loi de $Z = X + Y$?

Exercice 5 : Intégrales de Wallis

On pose, si $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\, dt$$

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers un réel l.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\, dt$.
   En déduire la valeur de u_2 (on utilisera une égalité classique).
4. Calculer u_3.
5. Établir une relation de récurrence entre u_n et u_{n-2} pour $n \geq 2$.
6. En déduire une expression de u_{2n} et u_{2n+1} à l'aide de factorielles, de puissances de 2 et de π.
7. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$:
   $$u_{2n} \cdot u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$$
8. En déduire la valeur de l.
9. Montrer que $u_{2n} \sim u_{2n+1}$ puis le fait que :
   $$u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$