La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laisser une marge à gauche et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Exercice 1 : Questions de cours

1. **Compléter les primitives suivantes :**
   Soit u une fonction dérivable.

expression	Primitive (à une constante près)
$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	
$\dfrac{u'}{u}$	
$\dfrac{u'}{u^2}$	
$\dfrac{u'}{u^n}$ (avec $n \geq 2$)	
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	
$u'u^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$	
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	
$u'\cos(u)$	
$u'\sin(u)$	
$u'f'(u)$	

2. Donner la définition de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire discrète. Rappeler leurs valeurs pour la loi binomiale et démontrer le résultat pour l'espérance.
3. Énoncer et démontrer le lien entre monotonie et fonction dérivable (dans le cas de la stricte monotonie la preuve n'est pas exigée).
4. Donner la définition de trois différentes limites (au moins une fonction et une suite). Vous pourrez faire un dessin pour illustrer la situation.

Voir cours.

Exercice 2 : des questions proches du cours

1. Calculez les limites suivantes :

   a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - 6x + 8}{x^2 - 3x + 2}$

   b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 2} - 2}{x^3 + 3x^2 + 5x + 3}$

   c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\exp(\cos(x))}{x}$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \exp\left(\dfrac{x\ln(1+x)}{\sin x^2}\right)$

a) On a une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ en $x = 2$. On factorise le numérateur et le dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{x^3 - x^2 - 6x + 8}{x^2 - 3x + 2} &= \frac{(x-2)(x^2+x-4)}{(x-2)(x-1)} \\ &= \frac{x^2+x-4}{x-1} \quad \text{pour } x \neq 2\end{aligned}$$

Par continuité, $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 - x^2 - 6x + 8}{x^2 - 3x + 2} = \frac{4+2-4}{2-1} = \boxed{2}$

b) On a une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ en $x = -1$.

On multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du numérateur :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2-x+2}-2}{x^3+3x^2+5x+3} &= \frac{(\sqrt{x^2-x+2}-2)(\sqrt{x^2-x+2}+2)}{(x^3+3x^2+5x+3)(\sqrt{x^2-x+2}+2)} \\ &= \frac{x^2-x+2-4}{(x^3+3x^2+5x+3)(\sqrt{x^2-x+2}+2)} \\ &= \frac{x^2-x-2}{(x^3+3x^2+5x+3)(\sqrt{x^2-x+2}+2)} \\ &= \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2+2x+3)(\sqrt{x^2-x+2}+2)} \\ &= \frac{x-2}{(x^2+2x+3)(\sqrt{x^2-x+2}+2)} \quad \text{pour } x \neq -1\end{aligned}$$

Par continuité en $x = -1$ de la fonction racine, on a :

$$\lim_{x\to -1} \frac{x-2}{(x^2+2x+3)(\sqrt{x^2-x+2}+2)} = \frac{-1-2}{(1-2+3)(\sqrt{1+1+2}+2)} = \frac{-3}{2\cdot 4} = \boxed{-\frac{3}{8}}$$

c) Pour tout x, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

Donc $e^{-1} \leq \exp(\cos(x)) \leq e$ par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $\frac{e^{-1}}{x} \leq \frac{\exp(\cos(x))}{x} \leq \frac{e}{x}$ car $x > 0$.

Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\exp(\cos(x))}{x} = \boxed{0}$

d) On a $\frac{x\ln(1+x)}{\sin x^2} = \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{x^2}{\sin x^2}$

Quand $x \to 0$: $\ln(1+x) \sim x$ donc $\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$

Et comme $x^2 \to 0$, on a $\sin(x^2) \sim x^2$ donc $\frac{x^2}{\sin x^2} \to 1$

Ainsi $\frac{x\ln(1+x)}{\sin x^2} \to 1$ et donc, par continuité de l'exponentielle en 1, $\lim\limits_{x\to 0} \exp\left(\frac{x\ln(1+x)}{\sin x^2}\right) = \exp(1) = \boxed{e}$.

2. Donner si possible un équivalent des fonctions suivantes au point considéré et préciser les limites en ce point :

a) $\dfrac{x^2+2x^3-2x^5}{7x-3x^4+8x^5}$ en $+\infty$

b) $\dfrac{3x^3+e^x+2}{e^{2x}+\ln(x)+x^5}$ en $+\infty$

c) $b(x)=x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ en $+\infty$

d) $d(x)=\dfrac{(x+1)^x-1}{x}$ en 0

e) $e(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ en 0

f) $i(x)=\dfrac{\ln\left(\cos^2(x)\right)}{x^2}$ en 0

a) En $+\infty$, on garde les termes de plus haut degré :

$$\frac{x^2+2x^3-2x^5}{7x-3x^4+8x^5}\sim_{+\infty}\frac{-2x^5}{8x^5}=-\frac{1}{4}$$

Donc la limite en $+\infty$ est $\boxed{-\dfrac{1}{4}}$

b) Au numérateur, on factorise par e^x (terme dominant) et au dénominateur par e^{2x} (terme dominant) :

$$\frac{3x^3+e^x+2}{e^{2x}+\ln(x)+x^5}=\frac{e^x}{e^{2x}}\cdot\frac{\frac{3x^3}{e^x}+1+\frac{2}{e^x}}{1+\frac{\ln(x)}{e^{2x}}+\frac{x^5}{e^{2x}}}$$

$$=e^{-x}\cdot\frac{\frac{3x^3}{e^x}+1+\frac{2}{e^x}}{1+\frac{\ln(x)}{e^{2x}}+\frac{x^5}{e^{2x}}}$$

Application des croissances comparées :
Par croissance comparée en $+\infty$:

— $\dfrac{x^3}{e^x}\to 0$

— $\dfrac{2}{e^x}\to 0$

— $\dfrac{\ln(x)}{e^{2x}}\to 0$

— $\dfrac{x^5}{e^{2x}}\to 0$

Donc :

$$\frac{\frac{3x^3}{e^x}+1+\frac{2}{e^x}}{1+\frac{\ln(x)}{e^{2x}}+\frac{x^5}{e^{2x}}}\to\frac{0+1+0}{1+0+0}=1$$

Par conséquent :

$$\frac{3x^3+e^x+2}{e^{2x}+\ln(x)+x^5}\sim_{+\infty}e^{-x}\cdot 1=\boxed{e^{-x}}$$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

Donc la limite en $+\infty$ est $\boxed{0}$

c) On pose $u=\dfrac{\pi}{x}$. Quand $x\to+\infty$, $u\to 0^+$.

$$b(x)=x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)=\frac{\pi}{u}\sin(u)=\pi\cdot\frac{\sin u}{u}$$

Puisque $\dfrac{\sin u}{u} \to 1$ quand $u \to 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} b(x) = \boxed{\pi}$

d) On écrit $(x+1)^x = e^{x\ln(1+x)}$. Quand $x \to 0$: $x\ln(1+x) \to 0$
On utilise alors l'équivalent classique : $e^y - 1 \sim_0 y$.
Ainsi $(x+1)^x - 1 \sim_0 x\ln(1+x)$.
Ainsi $d(x) = \dfrac{(x+1)^x - 1}{x} \sim \dfrac{x\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)$
Enfin, on a $\ln(1+x) \sim_0 x$, donc $\boxed{d(x) \sim_0 x}$.
Donc $\lim\limits_{x\to0} d(x) = \boxed{0}$

e) $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = x - (-x) + o(x) = 2x + o(x)\boxed{\sim_0 2x}$. Attention à ne pas sommer les équivalents !
Donc $e(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \sim \dfrac{2x}{x} = 2$
Ainsi $\lim\limits_{x\to0} e(x) = \boxed{2}$

f) $\ln(\cos^2(x)) = 2\ln(\cos(x))$
On utilise l'équivalent classique (comme on veut composer par une fonction on prend la version avec les petitos) : $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc

$$\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \sim -\frac{x^2}{2}$$

Donc $i(x) = \dfrac{2\ln(\cos(x))}{x^2} \sim \dfrac{-x^2}{x^2} = -1$
Ainsi $\lim\limits_{x\to0} i(x) = \boxed{-1}$

3. Un météorologue étudie la météo dans une région. Il observe que : s'il fait beau un jour, il pleut le lendemain avec la probabilité 1/3. S'il pleut un jour, il pleut encore le lendemain avec la probabilité 2/3. On note p_n la probabilité qu'il pleuve le n-ème jour.
Déterminez p_{n+1} en fonction de p_n, puis p_n en fonction de p_1 et n et déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Posons d'abord, pour tout entier n, l'évènement P_n : "il pleut le jour n". Soit $n \geq 2$. On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet $\{P_n, \overline{P_n}\}$:

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= P(P_{n+1}) \\
&= P(P_{n+1} \cap P_n) + P(P_{n+1} \cap \overline{P_n}) \\
&= P_{P_n}(P_{n+1})P(P_n) + P_{\overline{P_n}}(P_{n+1})P(\overline{P_n}) \\
&= \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}(1-p_n) \\
&= \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}p_n \\
&= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite arithmético-géométrique. On commence par résoudre l'équation associée :

$$c = \frac{1}{3}c + \frac{1}{3} \Leftrightarrow c - \frac{1}{3}c = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}c = \frac{1}{3} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

On pose alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = p_n - \frac{1}{2}$. On a, pour tout entier non nul n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3}(u_n + \frac{1}{2}) + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}(p_n - \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{3}u_n \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{1}{2}$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(p_1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Par conséquent :

$$p_n = u_n + \frac{1}{2} = \left(p_1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

Enfin, comme $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ car $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 0 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

4. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies conjointement par $u_0 = 1$ et $v_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$$

   a) Écrire un programme Python qui calcule les $n$ièmes termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) Écrire un programme Python qui représente les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour n allant de 0 à 20, (Bonus : en rouge et bleu, avec une légende).
   c) Exprimez le terme général de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $s_n = u_n - v_n$. Que peut-on en déduire sur la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   d) On pose, pour tout entier n, $s_n = u_n + v_n$. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence suivante : $s_{n+1} = s_n - \frac{2}{5}d_n$.
   e) En déduire une expression de s_n en fonction de n.
   Indication : on pourra faire apparaître une somme télescopique.
   f) En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n, puis leurs limites.

a) **Programme Python pour calculer u_n et v_n :**

```
def calcul_u_v(n):
    u = 1
    v = 3
    for i in range(n):
        u_new = (2*u + 3*v) / 5
        v = (u + 4*v) / 5
        u = u_new
```

```
    return u, v
```

b) **Programme Python pour représenter les suites :**

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def representation(n):
    U = np.zeros(n+1)
    V = np.zeros(n+1)
    U[0] = 1
    V[0] = 3

    for i in range(n):
        u_n = (2*U[i] + 3*V[i]) / 5
        v_n = (U[i] + 4*V[i]) / 5
        U[i+1] = u_n
        V[i+1] = v_n

    plt.plot(range(n+1), U, 'rx', label='u_n')
    plt.plot(range(n+1), V, 'bx', label='v_n')
    plt.legend()
    plt.xlabel('n')
    plt.ylabel('Valeur')
    plt.title('Représentation des suites u_n et v_n')
    plt.grid(True)
    plt.show()
```

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$d_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5} - \frac{u_n + 4v_n}{5} = \frac{u_n - v_n}{5} = \frac{d_n}{5}$$

Donc $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$:

$$\boxed{d_n = d_0 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n = (1-3) \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n = -\frac{2}{5^n}}$$

Comme $d_n \to 0$, on a $u_n - v_n \to 0$, donc les suites u_n et v_n ont la même limite (si elles convergent).

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= u_{n+1} + v_{n+1} \\ &= \frac{2u_n + 3v_n}{5} + \frac{u_n + 4v_n}{5} \\ &= \frac{3u_n + 7v_n}{5} \\ &= \frac{(u_n + v_n) + 2(u_n - v_n)}{5} + (u_n + v_n) - \frac{(u_n + v_n) + 2(u_n - v_n)}{5} \\ &= s_n - \frac{2}{5} d_n \end{aligned}$$

e) On a, pour tout entier n :

$$s_{n+1} = s_n - \frac{2}{5} d_n = s_n + \frac{4}{5^{n+1}}$$

On réécrit cette relation :

$$s_{n+1} - s_n = \frac{4}{5^{n+1}}$$

En sommant de $k = 0$ à $n - 1$:

$$s_n - s_0 = \sum_{k=0}^{n-1} s_{k+1} - s_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4}{5^{k+1}}$$

Donc :

$$s_n = s_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4}{5^{k+1}} = 4 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1 - (1/5)^n}{4/5} = \boxed{5 - \frac{1}{5^n}}$$

f) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_n = \frac{s_n + d_n}{2} = \boxed{\frac{5}{2} - \frac{3}{2 \cdot 5^n}}$$

$$v_n = \frac{s_n - d_n}{2} = \boxed{\frac{5}{2} + \frac{1}{2 \cdot 5^n}}$$

Limites :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{5}{2}}$$

car $-1 < \frac{1}{5} < 1$.

5. Calculez les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 x^3 \, dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} \ln(x) \, dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} \, dx$

d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2 - 1} \, dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 x e^x \, dx$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x) \, dx$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(2x) \cos^3(x) \, dx$ (poser $u = \cos(x)$)

h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \, dx$ (poser $u = 4 - x^2$)

Je ne le marquerai pas à chaque fois, mais les intégrales sont toutes bien définies (les fonctions à intégrer sont continues sur les intervalles d'intégration).

a) $\displaystyle\int_0^1 x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{4}}$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} \ln(x) \, dx$

On reconnaît la forme $u'u$ avec $u = \ln(x)$. Donc

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} \, dx = \left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_1^2 = \boxed{\frac{(\ln 2)^2}{2}}$$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} \, dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx = [x - \arctan(x)]_0^1 = \boxed{1 - \frac{\pi}{4}}$

d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,dx$

Décomposition en éléments simples : $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1/2}{x-1} - \dfrac{1/2}{x+1}$

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left[\ln|x-1| - \ln|x+1|\right]_2^3 = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^3$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4} - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} = \boxed{\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}}$$

e) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$

Intégration par parties : $u : x \to x$, $v' : x \to e^x$, donc $u' : x \to 1$, $v : x \to e^x$. Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

$$\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = \boxed{1}$$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2\sin(x)\,dx$

Intégration par parties (deux fois) :

Première IPP : $u : x \to x^2$, $v' : x \to \sin(x)$, donc $u' : x \to 2x$, $v : x \to -\cos(x)$. Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$.

$$\int_0^{\pi/2} x^2\sin(x)\,dx = [-x^2\cos(x)]_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx = 0 + 2\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx$$

Deuxième IPP : $u : x \to x$, $v' : x \to \cos(x)$, donc $u' : x \to 1$, $v : x \to \sin(x)$. Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$.

$$2\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx = 2\left([x\sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin(x)\,dx\right)$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} - [-\cos(x)]_0^{\pi/2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \boxed{\pi - 2}$$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\cos^3(x)\,dx$

On pose $\varphi : x \mapsto \cos(x)$. La fonction φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$ avec $\varphi'(x) = -\sin(x)$, donc $\sin(x)\,dx = -du$.

On a $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, donc :

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\cos^3(x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos^4(x)\,dx$$

En posant $u = \varphi(x) = \cos(x)$, quand $x = 0$, $u = 1$ et quand $x = \pi/2$, $u = 0$:

$$= 2\int_1^0 u^4 \cdot (-du) = 2\int_0^1 u^4\,du = 2\left[\frac{u^5}{5}\right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{5}}$$

h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

On pose $\varphi : x \mapsto 4 - x^2$. La fonction φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ avec $\varphi'(x) = -2x$, d'où $x\,dx = -\dfrac{\varphi'(x)}{2}\,dx$.
Quand $x = 0$, $\varphi(0) = 4$; quand $x = 1$, $\varphi(1) = 3$. En posant $u = \varphi(x) = 4 - x^2$:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_4^3 u^{-1/2}\,du = -\frac{1}{2}\left[2u^{1/2}\right]_4^3 = \left[\sqrt{u}\right]_3^4 = \boxed{2-\sqrt{3}}$$

Exercice 3 : Étude d'une suite implicite

Les deux parties sont très largement indépendantes.

Partie I

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = x\ln(x)$.

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer g'.
2. Dresser le tableau de variations complet de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que g réalise une bijection de $\left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$ sur un intervalle J à déterminer.
4. On note g^{-1} sa bijection réciproque.
   a) Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur J.
   b) Dresser le tableau de variations complet de g^{-1}.
   c) Calculer $g^{-1}(0)$ puis $\left(g^{-1}\right)'(0)$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution x_n sur $\left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$, puis vérifier que $x_n \geq 1$.
6. Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il affiche une valeur approchée de x_n à 10^{-3} :

```
import numpy as np
def approx_x_n(n):
    x=1
    while - - - - - -:
        x=x+0.001
    return(x)
```

7. a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
   c) En revenant à la définition de x_n, montrer que $\ln(x_n) + \ln(\ln(x_n)) = \ln(n)$.
   d) En déduire $\ln(x_n) \sim \ln n$.
   e) Déterminer alors un équivalent de x_n.

Partie I

1. La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, par produit, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$g'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \boxed{\ln(x) + 1}$$

2. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ car la fonction exponentielle est injective sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{e}$ car la fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ (croissance comparée).

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

$g\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e}\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. g est continue sur $\left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$ (car dérivable), strictement croissante sur cet intervalle. Par le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $\left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$ sur $g\left(\left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[\right) = \left[g\left(\dfrac{1}{e}\right), \lim\limits_{+\infty} g\right[= \boxed{J = \left[-\dfrac{1}{e}, +\infty\right[}$

4. a) g est dérivable sur $\left]\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$ et $g'(x) = \ln(x) + 1 \neq 0$ pour $x > \dfrac{1}{e}$ (car $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$).

   Donc g^{-1} est dérivable sur $g\left(\left]\dfrac{1}{e}, +\infty\right[\right) = \left]-\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$.

   En $y = -\dfrac{1}{e}$, $g'\left(\dfrac{1}{e}\right) = 0$ donc g^{-1} n'est pas dérivable en $-\dfrac{1}{e}$.

   b) g^{-1} est strictement croissante sur J (comme g).

   $\lim\limits_{y\to-\frac{1}{e}} g^{-1}(y) = \dfrac{1}{e}$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} g^{-1}(y) = +\infty$.

   Le tableau de variations de g^{-1} est alors :

y	$-\frac{1}{e}$		$+\infty$
$(g^{-1})'(y)$	‖	$+$	
$g^{-1}(y)$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

   c) $g^{-1}(0)$ est l'unique $x \in \left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$ tel que $g(x) = 0$.

   $g(x) = 0 \Leftrightarrow x\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0$ (car $x > 0$) $\Leftrightarrow x = 1$ car la fonction logarithme est injective sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Donc $\boxed{g^{-1}(0) = 1}$.

   Pour calculer $\left(g^{-1}\right)'(0)$, on utilise la formule de la dérivée de la bijection réciproque :

   $(g^{-1})'(0) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(0))} = \dfrac{1}{g'(1)} = \dfrac{1}{\ln(1)+1} = \boxed{1}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $n \geq 1 > 0 > -\dfrac{1}{e}$, donc $n \in J$.

   Par définition de la bijection réciproque, l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution $x_n = g^{-1}(n)$ sur $\left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$.

   De plus, $g(1) = 1 \cdot \ln(1) = 0 < n$ pour tout $n \geq 1$.

   Comme g est strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$ et $g(x_n) = n > 0 = g(1)$, on a $\boxed{x_n > 1}$.

6. Le programme doit chercher x tel que $g(x) \approx n$:

```
import numpy as np
def approx_x_n(n):
    x=1
    while x*np.log(x) < n:
        x=x+0.001
    return(x)
```

   Ce programme fonctionne car g est strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$, donc $g(x) < n \Leftrightarrow x < x_n$.

7. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $g(x_n) = n < n + 1 = g(x_{n+1})$.

      Comme g est strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$, on a $x_n < x_{n+1}$.

      Donc $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}}$.

   b) Par l'absurde, supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par M.
      Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc converge vers $\ell \leq M$.
      Par continuité de g : $g(\ell) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Contradiction.

      Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty}$.

   c) On a $g(x_n) = n$, donc $x_n \ln(x_n) = n$.
      Comme $x_n > 1$, on a $\ln(x_n) > 0$. En passant au logarithme :

$$\ln(x_n \ln(x_n)) = \ln(n)$$

$$\boxed{\ln(x_n) + \ln(\ln(x_n)) = \ln(n)}$$

   d) Puisque $x_n \to +\infty$, on a pour n assez grand $e < x_n$.
      Donc, pour n assez grand, on a $1 < \ln(x_n)$ et donc $\ln(\ln(x_n)) > 0$.
      D'autre part, pour n assez grand, on a :

$$g(n) = n\ln(n) > n \quad (\text{car } \ln(n) > 1 \text{ pour } n > e)$$

      Donc, comme g est strictement croissante :

$$x_n < n \quad \text{pour tout } n > e$$

      D'où $\ln(x_n) < \ln(n)$ pour tout $n > e$.
      Ainsi, pour n assez grand :

$$0 < \ln(\ln(x_n)) < \ln(\ln(n))$$

      On peut utiliser les gendarmes et les croissances comparées pour conclure que $\dfrac{\ln(\ln(x_n))}{\ln(n)} \to 0$.

On divise donc par $\ln(n) \neq 0$ dans l'équation $\ln(x_n) + \ln(\ln(x_n)) = \ln(n)$:

$$\frac{\ln(x_n)}{\ln(n)} + \frac{\ln(\ln(x_n))}{\ln(n)} = 1$$

Par somme de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{\ln(n)} + \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln(x_n))}{\ln(n)} = 1$$

Donc $\boxed{\ln(x_n) \sim \ln(n)}$.

e) De $x_n \ln(x_n) = n$ et $\ln(x_n) \sim \ln(n)$, on déduit :

$$x_n \sim \frac{n}{\ln(x_n)} \sim \frac{n}{\ln(n)}$$

Donc $\boxed{x_n \sim \dfrac{n}{\ln(n)}}$.

Partie II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit $f_n(x) = \begin{cases} xe^{-n/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

8. Montrer que f_n est continue sur $[0, +\infty[$.
9. Montrer que f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$.
10. Dresser le tableau de variations complet de f_n sur $[0, +\infty[$.
11. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) - x = -n$. Interpréter graphiquement.
12. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est x_n où x_n est le réel défini partie I.

Partie II

8. f_n est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues.
   En 0 : $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to0^+} xe^{-n/x}$.
   Posons $X = \dfrac{n}{x} \to +\infty$ quand $x \to 0^+$. Alors $x = \dfrac{n}{X}$ et :

   $$f_n(x) = \frac{n}{X}e^{-X} = \frac{n}{Xe^X} \to 0 \quad \text{(croissance comparée)}$$

   Donc $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$. Ainsi $\boxed{f_n \text{ est continue sur } [0, +\infty[}$.
9. Sur $\mathbb{R}_+^*$, f_n est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables et on a :
   $f_n'(x) = e^{-n/x} + x \cdot \dfrac{n}{x^2}e^{-n/x} = e^{-n/x}\left(1 + \dfrac{n}{x}\right) = \boxed{\dfrac{x+n}{x}e^{-n/x}}$
   En 0 : $\dfrac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \dfrac{xe^{-n/x}}{x} = e^{-n/x} \to 0$ quand $x \to 0^+$.
   Donc f_n est dérivable en 0 avec $f_n'(0) = 0$.
   Ainsi $\boxed{f_n \text{ est dérivable sur } [0, +\infty[}$.
10. Pour $x > 0$: $f_n'(x) = \dfrac{x+n}{x}e^{-n/x} > 0$ car $x + n > 0$, $x > 0$ et $e^{-n/x} > 0$.

Donc f_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-n/x} = +\infty \cdot e^0 = +\infty$.

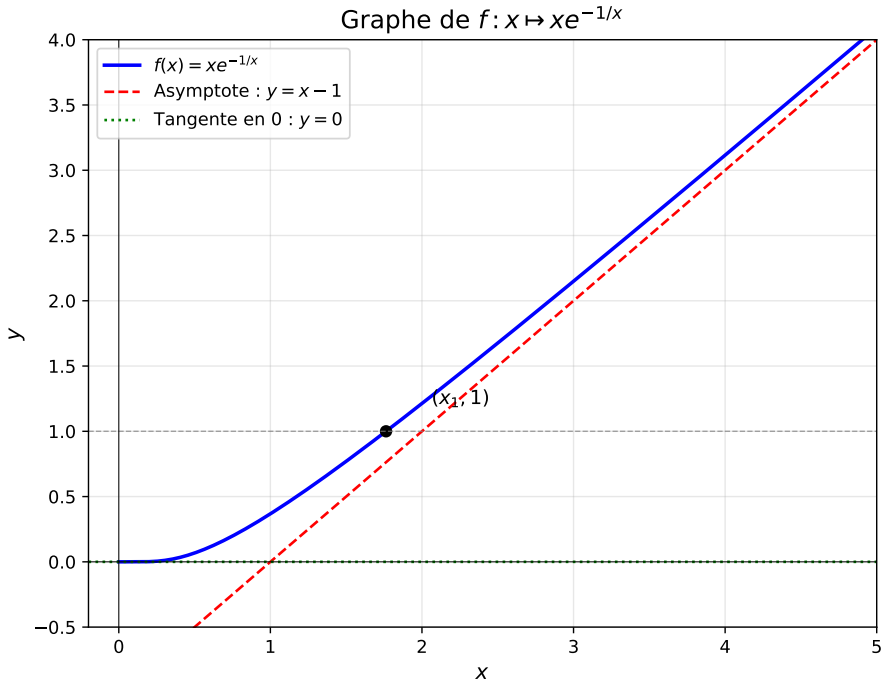
x	0		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$+$	
f_n	0	$\nearrow$	$+\infty$

11. $f_n(x) - x = xe^{-n/x} - x = x(e^{-n/x} - 1)$.
Quand $x \to +\infty$: $-\dfrac{n}{x} \to 0$, donc par équivalents classiques : $e^{-n/x} = 1 - \dfrac{n}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Ainsi $f_n(x) - x = x\left(-\dfrac{n}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = -n + o(1) \to -n$.
Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} (f_n(x) - x) = -n}$.
Interprétation : La droite $y = x - n$ est asymptote oblique à la courbe de f_n en $+\infty$.
12. f_n est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, avec $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f_n = +\infty$.
Comme $0 < 1 < +\infty$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$ par le théorème de la bijection.
Cette solution vérifie : $\alpha e^{-n/\alpha} = 1$, en passant au logarithme : $\ln(\alpha) - \dfrac{n}{\alpha} = 0$, soit $n = \alpha \ln(\alpha) = g(\alpha)$.
Donc α est solution de $g(x) = n$, ce qui donne $\boxed{\alpha = x_n}$.

Dorénavant, et jusqu'à la fin de l'exercice, on pose $n = 1$ et on note f la fonction f_1 définie ci-dessus.

13. a) Dessiner l'allure de f sur $\mathbb{R}_+$, en précisant sa tangente en 0 et en utilisant le résultat de 10.
b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.
c) Montrer que f' est continue sur $[0, 1]$.
d) Calculer pour tout $x \in]0, 1\,[$, $f''(x)$.
e) Montrer alors que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{2}{e}$
14. On définit alors la suite v par : $v_0 \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.
a) i. Ecrire une fonction python qui au réel $x \in \mathbb{R}^+$associe le réel $f(x)$.
ii. Ecrire une fonction python d'en-tête def v(n, a) : qui renvoie la valeur de v_n lorsque $v_0 = a$.
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0, 1]$.
c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_{n+1}| \leq \dfrac{2}{e} |v_n|$.
d) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq \left(\dfrac{2}{e}\right)^n$.
e) Qu'en déduit-on ?

13. a) Pour $n = 1$: $f(x) = xe^{-1/x}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.
D'après les questions précédentes : $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ (tangente horizontale en 0), f est strictement croissante, et la droite $y = x - 1$ est asymptote oblique.
Voici une figure de la courbe représentative de f représentée avec Python et les éléments précédents :



Code Python pour générer ce graphique :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return x * np.exp(-1/x)

x = np.linspace(0.01, 5, 1000)
plt.plot(x, f(x), label="f(x)")
plt.plot(x, x - 1, "--", label="y = x - 1")
plt.plot(x, 0*x, ":", label="Tangente en 0")
plt.xlim(0, 5)
plt.ylim(-0.5, 4)
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

Pour ne pas avoir de problème de division par zéro, on trace f à partir de 0.01.

b) Soit $x \in [0,1]$. On a vu que f est strictement croissante sur $[0,1]$ et que $f(0) = 0$, $f(1) = e^{-1} < 1$.

Donc $\boxed{\forall x \in [0,1], f(x) \in [0,1]}$.

c) $f'(x) = \dfrac{x+1}{x} e^{-1/x}$ pour $x > 0$ et $f'(0) = 0$.

f' est continue sur $]0,1]$ comme produit et composée de fonctions continues.

En 0 : $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x+1}{x} e^{-1/x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x}$.

Posons $X = \dfrac{1}{x} \to +\infty$. Alors $(1+X)e^{-X} \to 0$ (croissance comparée).

Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0 = f'(0)$. Ainsi $\boxed{f' \text{ est continue sur } [0,1]}$.

d) Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{x+1}{x}e^{-1/x}\right] \\ &= \frac{-1}{x^2}e^{-1/x} + \frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}e^{-1/x} \\ &= \frac{e^{-1/x}}{x^2}\left(-1+\frac{x+1}{x}\right) \\ &= \frac{e^{-1/x}}{x^2}\cdot\frac{1}{x} = \boxed{\frac{e^{-1/x}}{x^3}} \end{aligned}$$

e) Pour $x \in]0,1]$: $f''(x) = \dfrac{e^{-1/x}}{x^3} > 0$, donc f' est strictement croissante sur $]0,1]$.

Avec $f'(0) = 0$ et $f'(1) = 2e^{-1} = \dfrac{2}{e}$, on a pour tout $x \in [0,1]$:

$$0 \leq f'(x) \leq \frac{2}{e}$$

Donc $\boxed{\forall x \in [0,1], |f'(x)| \leq \dfrac{2}{e}}$.

14. a) i. Programme Python pour f :

```
import numpy as np
def f(x):
    if x == 0:
        return 0
    return x * np.exp(-1/x)
```

ii. Programme Python pour v_n :

```
def v(n, a):
    val = a
    for i in range(n):
        val = f(val)
    return val
```

b) Par récurrence : $v_0 \in [0,1]$ par hypothèse.
Si $v_n \in [0,1]$, alors $v_{n+1} = f(v_n) \in [0,1]$ d'après 12b.
Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [0,1]}$.

c) Par l'inégalité des accroissements finis : f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $|f'| \leq \dfrac{2}{e}$ sur $[0,1]$.
Comme $f(0) = 0$ et $v_n \in [0,1]$:

$$|v_{n+1}| = |f(v_n)| = |f(v_n) - f(0)| \leq \frac{2}{e}|v_n - 0| = \boxed{\frac{2}{e}|v_n|}$$

d) Par récurrence immédiate : $|v_0| \leq 1 = \left(\dfrac{2}{e}\right)^0$.

Si $|v_n| \leq \left(\dfrac{2}{e}\right)^n$, alors $|v_{n+1}| \leq \dfrac{2}{e}|v_n| \leq \dfrac{2}{e}\cdot\left(\dfrac{2}{e}\right)^n = \left(\dfrac{2}{e}\right)^{n+1}$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq \left(\dfrac{2}{e}\right)^n}$.

e) Comme $0 < \frac{2}{e} < 1$ (car $e > 2$), on a $\left(\frac{2}{e}\right)^n \to 0$.

Par le théorème d'encadrement : $0 \leq |v_n| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n \to 0$.

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0}$.

La suite (v_n) converge vers 0, qui est le point fixe de f dans $[0, 1]$.

Exercice 4 : Fonctions génératrices

Pour X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$, on appelle fonction génératrice la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$$

où $p_k = P(X = k)$.

1. Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p ; une loi binomiale de paramètres n et p.
2. Démontrer que deux variables aléatoires discrètes finies X et Y ont même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.
3. Montrer que $E(X) = G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$. Retrouver l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
4. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes finies indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$. Retrouver alors la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales respectives $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$. Quelle est la loi de $Z = X + Y$?

1. **Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$:**
   $X \in \{0, 1\}$ avec $P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$.

   $$G_X(x) = (1-p)x^0 + px^1 = \boxed{1 - p + px}$$

   Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

   $X \in \{0, 1, \ldots, n\}$ avec $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

   $$G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (px)^k (1-p)^{n-k} = \boxed{(1 - p + px)^n}$$

   par la formule du binôme de Newton.
2. ($\Rightarrow$) Si X et Y ont même loi, alors pour tout k, $P(X = k) = P(Y = k)$, donc les coefficients des polynômes G_X et G_Y sont égaux, donc $G_X = G_Y$.
   ($\Leftarrow$) Réciproquement, si $G_X = G_Y$, alors les deux polynômes ont les mêmes coefficients.
   Or le coefficient de x^k dans G_X est $P(X = k)$ et celui dans G_Y est $P(Y = k)$.
   Donc pour tout k, $P(X = k) = P(Y = k)$, i.e. X et Y ont même loi.
3. **Espérance :**

   $$G'_X(x) = \sum_{k=0}^{n} k p_k x^{k-1}$$

Donc $G'_X(1) = \sum_{k=0}^{n} kp_k = \boxed{E(X)}$.

Variance :

$$G''_X(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)p_k x^{k-2}$$

Donc $G''_X(1) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)p_k = E(X(X-1))$ par le transfert

$= E(X^2) - E(X)$ par linéarité de l'espérance.

Ainsi $E(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1)$.

Et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \boxed{G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2}$.

Application à $\mathcal{B}(n,p)$:

$G_X(x) = (1-p+px)^n$

$G'_X(x) = np(1-p+px)^{n-1}$, donc $G'_X(1) = np = \boxed{E(X)}$.

$G''_X(x) = n(n-1)p^2(1-p+px)^{n-2}$, donc $G''_X(1) = n(n-1)p^2$.

$V(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = \boxed{np(1-p)}$.

4. Soient X et Y indépendantes, avec $X \in \{0, \dots, n_X\}$ et $Y \in \{0, \dots, n_Y\}$.
Pour tout $k \in \{0, \dots, n_X + n_Y\}$:

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \sum_{j=0}^{k} P\left(\{X=j\} \cap \{Y=k-j\}\right) \text{ par probabilités totales SCE}(X=i)_i \\ &= \sum_{j=0}^{k} P(X=j)P(Y=k-j) \quad \text{(par indépendance)} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(x) &= \sum_{k=0}^{n_X+n_Y} P(X+Y=k)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n_X+n_Y} \sum_{j=0}^{k} P(X=j)P(Y=k-j)x^k \\ &= \sum_{j=0}^{n_X} \sum_{i=0}^{n_Y} P(X=j)P(Y=i)x^{j+i} \quad \text{(en posant } i=k-j\text{)} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n_X} P(X=j)x^j\right)\left(\sum_{i=0}^{n_Y} P(Y=i)x^i\right) \\ &= \boxed{G_X(x) \cdot G_Y(x)} \end{aligned}$$

Application : Si $X_1, \dots, X_n$ sont n v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $S = X_1 + \cdots + X_n$ a pour fonction génératrice :

$$G_S(x) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(x) = (1-p+px)^n$$

On retrouve bien la fonction génératrice de $\mathcal{B}(n,p)$.

5. $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$ indépendantes.
   $G_X(x) = (1-p+px)^n$ et $G_Y(x) = (1-p+px)^m$.
   $G_{X+Y}(x) = G_X(x)G_Y(x) = (1-p+px)^n(1-p+px)^m = (1-p+px)^{n+m}$.
   C'est la fonction génératrice d'une loi $\mathcal{B}(n+m,p)$.
   Donc $\boxed{Z = X+Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)}$.

Exercice 5 : Intégrales de Wallis

On pose, si $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt$$

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers un réel l.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt$.
   En déduire la valeur de u_2 (on utilisera une égalité classique).
4. Calculer u_3.
5. Établir une relation de récurrence entre u_n et u_{n-2} pour $n \geq 2$.
6. En déduire une expression de u_{2n} et u_{2n+1} à l'aide de factorielles, de puissances de 2 et de π.
7. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{2n} \cdot u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$$
8. En déduire la valeur de l.
9. Montrer que $u_{2n} \sim u_{2n+1}$ puis le fait que :
$$u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Commençons par remarquer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie : pour tout n, la fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est continue sur $[0,\pi/2]$, donc intégrable, et u_n est bien défini.

1. $u_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\,dt = \boxed{\frac{\pi}{2}}$
   $u_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)\,dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 0-(-1) = \boxed{1}$
2. Pour tout $t \in [0,\pi/2]$, $0 \leq \sin(t) \leq 1$, donc $0 \leq \sin^n(t) \leq 1$ par croissance de la fonction $x \to x^n$ sur $\mathbb{R}^+$. Donc par produit de nombres positifs,
$$\sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t).$$
   En intégrant : $u_{n+1} \leq u_n$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   De plus, $u_n \geq 0$ pour tout n (intégrale d'une fonction positive).
   Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.
3. On utilise la formule de Pythagore : $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ pour tout t.
   Donc $u_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2(t))\,dt = \int_0^{\pi/2} 1\,dt - \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt$. Par inté-

gration par parties avec $u : t \mapsto \cos(t)$ et $v : t \mapsto \sin(t)$ (u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$) :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt &= [\cos(t)\sin(t)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\,dt \\ &= 0 + \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\,dt = u_2\end{aligned}$$

Donc $u_2 = \dfrac{\pi}{2} - u_2$, donc $2u_2 = \dfrac{\pi}{2}$, donc $u_2 = \boxed{\dfrac{\pi}{4}}$.

4. Comme souvent, on essaye de réutiliser la même idée. On commence par utiliser la formule de Pythagore : $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ pour tout t. Donc

$$u_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^3(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \sin(t)(1 - \cos^2(t))\,dt = u_1 - \int_0^{\pi/2} \sin(t)\cos^2(t)\,dt.$$

On intègre par parties l'intégrale restante avec $u : t \mapsto \cos(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{\sin^2(t)}{2}$. On a u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin(t)\cos^2(t)\,dt &= \left[\cos(t)\cdot\frac{\sin^2(t)}{2}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\sin(t))\cdot\frac{\sin^2(t)}{2}\,dt \\ &= \left[\frac{\cos(t)\sin^2(t)}{2}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^3(t)\,dt\end{aligned}$$

Or $\left[\dfrac{\cos(t)\sin^2(t)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \dfrac{\cos(\pi/2)\sin^2(\pi/2)}{2} - \dfrac{\cos(0)\sin^2(0)}{2} = 0 - 0 = 0.$

Donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)\cos^2(t)\,dt = \frac{1}{2}u_3$.

Ainsi $u_3 = u_1 - \dfrac{1}{2}u_3$, soit $\dfrac{3}{2}u_3 = u_1 = 1$.

Finalement : $u_3 = \boxed{\dfrac{2}{3}}$.

5. Pour $n \geq 2$, on applique exactement les mêmes étapes que pour u_3 :

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(t)(1 - \cos^2(t))\,dt = u_{n-2} - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(t)\cos^2(t)\,dt.$$

On intègre par parties l'intégrale restante avec $u : t \mapsto \cos(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{\sin^{n-1}(t)}{n-1}$. On a u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(t)\cos^2(t)\,dt &= \left[\cos(t)\cdot\frac{\sin^{n-1}(t)}{n-1}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\sin(t))\cdot\frac{\sin^{n-1}(t)}{n-1}\,dt \\ &= \left[\frac{\cos(t)\sin^{n-1}(t)}{n-1}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt\end{aligned}$$

Or $\left[\dfrac{\cos(t)\sin^{n-1}(t)}{n-1}\right]_0^{\pi/2} = 0 - 0 = 0.$

Donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(t)\cos^2(t)\,dt = \frac{1}{n-1}u_n.$

Ainsi $u_n = u_{n-2} - \dfrac{1}{n-1}u_n$, soit $u_n + \dfrac{1}{n-1}u_n = u_{n-2}$, donc $\dfrac{n}{n-1}u_n = u_{n-2}$.

$$\boxed{u_n = \frac{n-1}{n}u_{n-2}}$$

6. En itérant la relation de récurrence :
Pour u_{2n} :

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{2n-1}{2n}u_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}u_{2n-4} = \cdots \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}u_0 \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Pour u_{2n+1} :

$$\begin{aligned} u_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}u_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}u_{2n-3} = \cdots \\ &= \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}u_1 \\ &= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \boxed{\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}} \end{aligned}$$

En fait, pour avoir ces résultats montrés rigoureusement, il faudrait faire une récurrence sur n pour montrer que les formules sont vérifiées pour tout n.
Récurrence pour u_{2n} :

— **Initialisation :** Pour $n = 0$, $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{(2\cdot 0)!}{2^{2\cdot 0}(0!)^2}\cdot\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{1\cdot 1}\cdot\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$. OK.

— **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$. Montrons que $u_{2(n+1)} = \dfrac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$.
On a :

$$u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}u_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+1)!}{(2n+2)\cdot 2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Or $(2n+2)\cdot 2^{2n} = 2(n+1)\cdot 2^{2n} = 2^{2n+1}(n+1)$ et $(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)!$, donc :

$$u_{2n+2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)^2(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

— **Conclusion :** Par application du principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}}$$

La récurrence pour u_{2n+1} se fait de manière analogue.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{2n} \cdot u_{2n+1} &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{(2n)!}{(2n+1)!} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \end{aligned}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{2n+2} \leq u_{2n+1} \leq u_{2n}$ (suite décroissante).
   De plus $u_{2n+2} = \dfrac{2n+1}{2n+2} u_{2n}$.
   Donc $\dfrac{2n+1}{2n+2} u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_{2n}$.
   En divisant par u_{2n} (qui est > 0) :

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} \leq 1$$

   Comme $\dfrac{2n+1}{2n+2} \to 1$, par encadrement : $\dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n}} \to 1$, i.e. $\boxed{u_{2n+1} \sim u_{2n}}$.
   De $u_{2n} \cdot u_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2(2n+1)} \sim \dfrac{\pi}{4n}$ et $u_{2n+1} \sim u_{2n}$:
   $u_{2n}^2 \sim \dfrac{\pi}{4n}$, donc $u_{2n} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.
   De même $u_{2n+1} \sim \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2(2n+1)}}$.
   Pour u_n général : si $n = 2m$, $u_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4m}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
   Si $n = 2m+1$, $u_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4m}} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
   Donc $\boxed{u_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$.
   En particulier, $\ell = \lim u_n = 0$.