Concours Blanc - Algèbre - Probabilités

La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laisser une marge à gauche et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Exercice 1 : Questions de cours

1. Donner la définition d'une racine d'un polynôme, compléter "a est une racine de $P(x)$ si et seulement si ..." et démontrer cette propriété.
2. Rappeler la définition d'une racine double d'un polynôme. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que a soit une racine multiple de P ?
3. Donner l'espérance et la variance d'une loi uniforme, démontrer le résultat pour la variance.
4. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Démontrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
5. Compléter et démontrer : F et G sont en somme directe si et seulement si ...

Exercice 2 : Des exercices proches du cours ou du DS précédent

1. Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les systèmes ci-dessous :

$$S_1 : \begin{cases} x - z &= m \\ -2x + 3y + 4z &= 1 \\ y + z &= 2m \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$

2. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.
   Calculer A^2 et A^3. En déduire, pour tout $n \geq 3$, A^n.
   Calculer, pour tout $n \geq 3$, B^n.
3. a) Déterminez les polynômes P tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(3x) = P'(x)P''(x)$
   b) Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}_3[x]$ tels que :

$$P(0) = 0;\ P(1) = 0;\ P(-1) = 1;\ P'(1) = 0.$$

   On pourra donner la réponse sous forme factorisée.
   c) Donner la factorisation des polynômes suivants :

   i. $P = x^4 + x^3 - 2x^2 - 8x$, ii. $Q = x^4 - x^2 - 6$, iii. $R = x^5 + 2x^3 + 9x$.

4. Soit M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $AX = X$ est un espace vectoriel que l'on notera E_1. Déterminer un vecteur V_1 tel que $E_1 = \text{Vect}(V_1)$. (*on verra plus tard que V_1 est un vecteur propre de M*).

b) De même, résoudre l'équation $MX = \frac{1}{4}X$ et écrire l'ensemble des solutions sous la forme $\text{Vect}(V_2, V_3)$ où V_2 et V_3 sont des vecteurs à déterminer.

c) Vérifier que (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

d) Donner les coordonnées de $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans la base (V_1, V_2, V_3).

Exercice 3 : Matrices et suites récurrentes

Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme et M une matrice carrée.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculez A^2 et trouvez a et b tels que $A^2 + aA + bI_3 = 0$. En déduire que A est inversible.
2. Soit $P(x) = x^2 - 3x + 2$
   a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminez le reste de la division euclidienne de x^n par $P(x)$, que l'on notera $R_n(x)$.
   b) Justifiez que $A^n = R_n(A)$ et calculez A^n.
3. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$, $v_0 = 2, w_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= v_n - w_n \\ v_{n+1} &= -u_n + 2v_n - w_n \\ w_{n+1} &= u_n - v_n + 2w_n \end{cases}$$

Calculer le n-ième terme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 : Probabilités et diagonalisation

Lors d'un déménagement, un professeur de mathématiques a rangé ses sujets pour l'ECG1 dans trois cartons : **A**, **B** et **C**. Initialement, les sujets du concours blanc d'algèbre sont dans le carton A. Chaque jour, comme il est extrêmement distrait, il déplace ses sujets selon les règles suivantes :

— Un objet dans le carton A reste dans A avec probabilité $\frac{1}{2}$, est déplacé dans B avec probabilité $\frac{1}{4}$ et dans C avec probabilité $\frac{1}{4}$.

— Un objet dans le carton B est déplacé dans A avec probabilité $\frac{1}{4}$, reste dans B avec probabilité $\frac{1}{2}$ et est déplacé dans C avec probabilité $\frac{1}{4}$.

— Un objet dans le carton C est déplacé dans A avec probabilité $\frac{1}{4}$, est déplacé dans B avec probabilité $\frac{1}{4}$ et reste dans C avec probabilité $\frac{1}{2}$.

On note a_n, b_n et c_n la probabilité que les sujets du concours blanc d'algèbre soient dans chaque carton au jour n, et on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. On rédigera soigneusement.

2. Écrire la matrice dite "de transition" M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.
3. On pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Calculer P^{-1}.
Remarque : l'an prochain, vous saurez trouver P^{-1} et D vous même !

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$ où $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$.
5. a) Exprimer X_n en fonction de M^n et de X_0. En déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   b) Déterminer les limites de ces suites quand $n \to +\infty$. Interpréter ce résultat.

Exercice 5 : Probabilités

On considère une urne initialement constituée d'une boule blanche et d'une boule noire.

Expérience 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette expérience, on effectue n tirages d'une boule dans l'urne avec remise de la boule tirée. On introduit Y, la variable aléatoire égale au numéro du tirage où l'on obtient une boule blanche pour la première fois, si un tel tirage existe, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. a) Justifier soigneusement $Y(\Omega)$ et déterminer $P(Y = 0)$.
   b) Déterminer pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(Y = k)$.
   c) Vérifier par le calcul que : $\sum_{k \in Y(\Omega)} P(Y = k) = 1$.
2. a) Pour $x \neq 1$, rappeler et démontrer la formule $\sum_{k=0}^{n} x^k = \cdots$.
   b) Pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.
   c) En déduire $E(Y)$. On ne cherchera pas à simplifier le résultat obtenu.

Expérience 2

On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le $(k+1)$-ième tirage (c'est-à-dire après le k-ième tirage). En particulier, on a $X_0 = 1$.

3. Déterminer la loi de X_1. Calculer son espérance et sa variance.
4. Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{1}{6}$$

5. a) Préciser l'ensemble $X_k(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X_k.

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}(X_k = 1) = \dfrac{1}{(k+1)!}$.

c) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $\mathbb{P}(X_k = k+1)$.

6. a) Soit $j \in X_k(\Omega)$. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche au $(k+1)$-ième tirage sachant $[X_k = j]$, ainsi que celle d'obtenir une boule noire au $(k+1)$-ième tirage sachant $[X_k = j]$.

b) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in X_{k+1}(\Omega), \quad \mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \frac{i}{k+2}\mathbb{P}(X_k = i) + \frac{k+3-i}{k+2}\mathbb{P}(X_k = i-1) \quad (*)$$

7. À l'aide de la formule $(*)$, déterminer la loi de X_3.

8. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $a_k = (k+1)! \times \mathbb{P}(X_k = 2)$.

a) Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k et de k.

b) Montrer que la suite $(b_k)_{k\geqslant 0}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N}, b_k = a_k + k + 2$ est géométrique.

c) En déduire alors que : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_k = 2) = \dfrac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}$.

9. Soit Y_k la variable aléatoire égale au nombre de boules noires présentes dans l'urne après k tirages. Justifier que X_k et Y_k ont même espérance. En déduire la valeur de $E(X_k)$.

Exercice 6 : Python

1. a) Établir que, lorsque k est inférieur ou égal à n :

$$\binom{n}{k} = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{n+1}{i} - 1 \right).$$

b) Écrire une fonction d'en-tête `def coeffbin(k,n):` permettant de calculer $\binom{n}{k}$ à partir des vecteurs `np.arange(1,k+1)` et `np.ones(k)`.

c) Retrouver ce résultat avec la commande suivante (qu'on justifiera) :

```
np.cumprod(np.arange(n,0,-1)/np.arange(1,n+1))
```

2. On désire créer une matrice de taille $n \times n$ ($n \geq 1$) dont l'élément de la ligne $i+1$ et de la colonne $j+1$ est égal à $\binom{i}{j}$, avec i et j dans $[\![0, n-1]\!]$.

a) Donner une ligne de commande permettant de créer une matrice C de taille $n \times n$ dont les éléments de la première colonne sont égaux à 1 (les autres éléments étant nuls).

b) Écrire une fonction d'en-tête `def triangle_Pascal(n)` qui remplit la matrice C à l'aide de la formule de Pascal et renvoie ainsi la matrice voulue (triangle de Pascal).

Indication : On rappelle que la commande np.cumprod permet de calculer le produit cumulatif des éléments d'un tableau. Par exemple, `np.cumprod(np.array([2,3,4]))` renvoie le tableau `np.array([2,6,24])`.

****Bon courage à toutes et tous !****