La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laisser une marge à gauche et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Exercice 1 : Questions de cours

1. Donner la définition d'une racine d'un polynôme, compléter "a est une racine de $P(x)$ si et seulement si ..." et démontrer cette propriété.
2. Rappeler la définition d'une racine double d'un polynôme. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que a soit une racine multiple de P ?
3. Donner l'espérance et la variance d'une loi uniforme, démontrer le résultat pour la variance.
4. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Démontrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
5. Compléter et démontrer : F et G sont en somme directe si et seulement si ...

Voir cours.

Exercice 2 : Des exercices proches du cours ou du DS précédent

1. Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les systèmes ci-dessous :

$$S_1 : \begin{cases} x - z &= m \\ -2x + 3y + 4z &= 1 \\ y + z &= 2m \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$

— **Système S_1 :** On résout par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{cases} x - z &= m \\ -2x + 3y + 4z &= 1 \\ y + z &= 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z &= m \\ 3y + 2z &= 1 + 2m \\ y + z &= 2m \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z &= m \\ 3y + 2z &= 1 + 2m \\ z &= 4m - 1 \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2)$$

On remonte : $z = 4m - 1$, puis $y = \frac{1}{3}(1 + 2m - 2z) = \frac{1}{3}(1 + 2m - 2(4m - 1)) = \frac{1}{3}(3 - 6m) = 1 - 2m$, et enfin $x = m + z = m + 4m - 1 = 5m - 1$.

$\boxed{S_1 = \{(5m - 1, 1 - 2m, 4m - 1)\}}$

— **Système S_2 :** L'opération qu'on a envie de faire ($L_2 \leftarrow mL_1 - L_2$) est possible quelle que soit la valeur de m puisque cela concerne L_1. On obtient alors :

$$S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + my &= -3 \\ (m^2 - 4)y &= -3m - 6 \end{cases}$$

Il y a maintenant 3 cas :

— Si $m^2 - 4 \neq 0$, c'est-à-dire si $m \notin \{-2, 2\}$, le système est de rang 2 et on obtient : $y = \dfrac{-3m - 6}{m^2 - 4} = \dfrac{-3(m + 2)}{(m - 2)(m + 2)} = \dfrac{-3}{m - 2}$ puis $x = -3 - my = -3 + \dfrac{3m}{m - 2} = \dfrac{-3m + 6 + 3m}{m - 2} = \dfrac{6}{m - 2}$

$$\boxed{S_2 = \left\{\left(\frac{6}{m-2}, \frac{-3}{m-2}\right)\right\}}$$

— Si $m = 2$, le système devient :

$$\begin{cases} x + 2y &= -3 \\ 0 &= -12 \end{cases}$$

Il est incompatible. $\boxed{S_2 = \emptyset}$

— Si $m = -2$, le système devient :

$$\begin{cases} x - 2y &= -3 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

Le système est de rang 1 et compatible. On a : $\boxed{S_2 = \{(-3 + 2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}}$

2. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 et A^3. En déduire, pour tout $n \geq 3$, A^n.
Calculer, pour tout $n \geq 3$, B^n.

On calcule :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

La matrice A est donc **nilpotente** d'indice 3. Pour tout $n \geq 3$, on a :

$$\boxed{A^n = A^3 \times A^{n-3} = 0_3}$$

Pour B : On remarque que $B = A + 2I_3$. Comme A et I_3 commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton : Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$B^n = (A + 2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} A^k$$

Comme $A^k = 0$ pour $k \geq 3$, il reste seulement les termes $k = 0, 1, 2$ (pour $n \geq 2$) :

$$B^n = 2^n I_3 + n \cdot 2^{n-1} A + \binom{n}{2} 2^{n-2} A^2$$

Soit, pour tout $n \geq 3$:

$$\boxed{B^n = 2^{n-2}\left(4I_3 + 2nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2\right)}$$

En développant avec les valeurs de A et A^2 :

$$B^n = 2^{n-2} \begin{pmatrix} 4 + \frac{5n(n-1)}{2} - 2n & 8n + \frac{5n(n-1)}{2} & 2n - \frac{5n(n-1)}{2} \\ 2n & 4 + 2n & -2n \\ \frac{5n(n-1)}{2} & 10n + \frac{5n(n-1)}{2} & 4 - \frac{5n(n-1)}{2} \end{pmatrix}$$

3. a) Déterminez les polynômes P tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(3x) = P'(x)P''(x)$

b) Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}_3[x]$ tels que :

$$P(0) = 0;\ P(1) = 0;\ P(-1) = 1;\ P'(1) = 0.$$

On pourra donner la réponse sous forme factorisée.

c) Donner la factorisation des polynômes suivants :

i. $P = x^4 + x^3 - 2x^2 - 8x$, ii. $Q = x^4 - x^2 - 6$, iii. $R = x^5 + 2x^3 + 9x$.

a) **Polynômes P tels que $P(3x) = P'(x)P''(x)$:**
Soit $n = \deg(P)$. Analysons les degrés des deux membres :
— Membre de gauche : $\deg(P(3x)) = n$
— Membre de droite : $\deg(P'(x)P''(x)) = (n-1) + (n-2) = 2n - 3$
Pour que l'égalité soit possible, on doit avoir $n = 2n - 3$, soit $n = 3$ ou $n = -\infty$. Le cas $n = -\infty$ correspond au polynôme nul $P(x) = 0$ qui fonctionne.
Cherchons donc P sous la forme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \neq 0$.
On calcule :
— $P(3x) = 27ax^3 + 9bx^2 + 3cx + d$
— $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
— $P''(x) = 6ax + 2b$
Donc $P'(x)P''(x) = (3ax^2 + 2bx + c)(6ax + 2b) = 18a^2x^3 + 6abx^2 + 12abx^2 + 4b^2x + 6acx + 2bc = 18a^2x^3 + 18abx^2 + (4b^2 + 6ac)x + 2bc$
Par identification des coefficients :

$$\begin{aligned} x^3 : &\quad 27a = 18a^2 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \text{ (car } a \neq 0) \\ x^2 : &\quad 9b = 18ab = 18 \times \frac{3}{2} \times b = 27b \Rightarrow b = 0 \\ x^1 : &\quad 3c = 4b^2 + 6ac = 6 \times \frac{3}{2} \times c = 9c \Rightarrow c = 0 \\ x^0 : &\quad d = 2bc = 0 \end{aligned}$$

Donc les polynômes solutions sont $\boxed{P : x \to \frac{3}{2}x^3}$, et $\boxed{P : x \to 0}$.

b) **Polynôme $P \in \mathbb{R}_3[x]$ tel que $P(0) = 0$, $P(1) = 0$, $P(-1) = 1$, $P'(1) = 0$:**
Puisque $P(0) = 0$ et $P(1) = 0$, on sait que 0 et 1 sont racines de P.
De plus, $P'(1) = 0$ et $P(1) = 0$ implique que 1 est racine double de P.
Donc P est divisible par $x(x-1)^2$. Comme $\deg(P) \leq 3$, on a :

$$P(x) = ax(x-1)^2 = ax(x^2 - 2x + 1) = a(x^3 - 2x^2 + x)$$

En utilisant $P(-1) = 1$:

$$a(-1)((-1) - 1)^2 = a(-1)(4) = -4a = 1$$

Donc $a = -\frac{1}{4}$.

$$\boxed{P(x) = -\frac{1}{4}x(x-1)^2}$$

c) **Factorisation des polynômes :**
i. $P = x^4 + x^3 - 2x^2 - 8x = x(x^3 + x^2 - 2x - 8)$
On cherche les racines de $Q = x^3 + x^2 - 2x - 8$. On teste $x = 2 : 8 + 4 - 4 - 8 = 0$
Donc $(x-2)$ divise Q. Par division euclidienne ou identification : $Q = (x-2)(x^2 + 3x + 4)$
Le discriminant de $x^2 + 3x + 4$ est $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$, donc pas de racine réelle.
$\boxed{P = x(x-2)(x^2 + 3x + 4)}$
ii. $Q = x^4 - x^2 - 6$
On pose $y = x^2 : y^2 - y - 6 = (y-3)(y+2)$
Donc $Q = (x^2 - 3)(x^2 + 2)$
$\boxed{Q = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 2)}$ et $\Delta < 0$ pour $x^2 + 2$.
iii. $R = x^5 + 2x^3 + 9x = x(x^4 + 2x^2 + 9)$
On pose $y = x^2 : y^2 + 2y + 9$. Le discriminant est $\Delta = 4 - 36 = -32 < 0$.
Pas de racine réelle, donc il faut faire autre chose.

Pour factoriser dans $\mathbb{R}[x]$, on écrit le début d'une identité remarquable :

$$x^4 + 2x^2 + 9 = (x^2+3)^2 - 6x^2 = (x^2 + 3 - \sqrt{6}x)(x^2 + 3 + \sqrt{6}x)$$

$\boxed{R = x(x^2 + 3 - \sqrt{6}x)(x^2 + 3 + \sqrt{6}x)}$ et $\Delta < 0$ pour les deux polynômes de degré 2.

4. Soit M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $AX = X$ est un espace vectoriel que l'on notera E_1. Déterminer un vecteur V_1 tel que $E_1 = \text{Vect}(V_1)$. (*on verra plus tard que V_1 est un vecteur propre de M*).

b) De même, résoudre l'équation $MX = \frac{1}{4}X$ et écrire l'ensemble des solutions sous la forme $\text{Vect}(V_2, V_3)$ où V_2 et V_3 sont des vecteurs à déterminer.

c) Vérifier que (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

d) Donner les coordonnées de $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans la base (V_1, V_2, V_3).

a) Notons E_1 l'ensemble des solutions de $MX = X$. Montrons que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
$0 \in E_1$ **:** On a $M \times 0_{\mathcal{M}_{3,1}} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}}$, donc $0_{\mathcal{M}_{3,1}} \in E_1$. L'ensemble E_1 est non vide.
Stabilité par multiplication : Soient $X \in E_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $MX = X$, donc :

$$M(\lambda X) = \lambda(MX) = \lambda X$$

Ainsi $\lambda X \in E_1$.
Stabilité par addition : Soient $X, Y \in E_1$. Alors $MX = X$ et $MY = Y$, donc :

$$M(X+Y) = MX + MY = X + Y$$

Ainsi $X + Y \in E_1$.
Conclusion : E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Détermination de E_1 : On résout $MX = X$. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z &=& x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z &=& y \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z &=& z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z &=& 0 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z &=& 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -2x + y + z &=& 0 \\ x - 2y + z &=& 0 \\ x + y - 2z &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x - 2y + z &=& 0 & (L_1 \leftarrow L_2) \\ 0x - 3y + 3z &=& 0 & (L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1) \\ 0x + 3y - 3z &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x - 2y + z &=& 0 & \\ -y + z &=& 0 & (L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2) \\ 0 &=& 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.$$

Ainsi $x = y = z$. Donc l'ensemble des solutions est :

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \boxed{\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).}$$

b) On résout de même $MX = \frac{1}{4}X$. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on résout le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z &= \frac{1}{4}x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z &= \frac{1}{4}y \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z &= \frac{1}{4}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z &= 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z &= 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z &= 0 \quad (L_1 \leftarrow 4L_1) \\ 0 &= 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ 0 &= 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\begin{aligned} E_{\frac{1}{4}} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \boxed{\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).} \end{aligned}$$

c) Pour vérifier que (V_1, V_2, V_3) est une base, on vérifie que la famille est libre. Cela suffit puisque $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$ est le cardinal de ma famille.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} aV_1 + bV_2 + cV_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a + b + c \\ a - b \\ a - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c &= 0 \\ a - b &= 0 \\ a - c &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c &= 0 \\ b &= a \\ c &= a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a &= 0 \\ b &= a \\ c &= a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{(V_1, V_2, V_3) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$

d) On cherche a, b, c tels que $aV_1 + bV_2 + cV_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Cela donne le système suivant que l'on résout par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrl} a+b+c &=& 7 & \\ a-b &=& 6 & \\ a-c &=& -1 & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrl} a-b &=& 6 & \\ a+b+c &=& 7 & \\ a-c &=& -1 & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrl} a-b &=& 6 & \\ 2b+c &=& 1 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ b-c &=& -7 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrl} a-b &=& 6 & \\ 2b+c &=& 1 & \\ -3c &=& -15 & (L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2) \end{array}\right.$$

On remonte : $c = 5$, puis $2b + 5 = 1 \Rightarrow b = -2$, et enfin $a = 6 + b = 4$.

$\boxed{\text{Les coordonnées sont } (4, -2, 5)}$. On peut vérifier en calculant :

$$4V_1 - 2V_2 + 5V_3 = 4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-2+5\\4+2+0\\4+0-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\6\\-1\end{pmatrix}$$

.

Exercice 3 : Matrices et suites récurrentes

Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme et M une matrice carrée.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculez A^2 et trouvez a et b tels que $A^2 + aA + bI_3 = 0$. En déduire que A est inversible.
2. Soit $P(x) = x^2 - 3x + 2$
   a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminez le reste de la division euclidienne de x^n par $P(x)$, que l'on notera $R_n(x)$.
   b) Justifiez que $A^n = R_n(A)$ et calculez A^n.
3. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1,\ v_0 = 2, w_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} &=& v_n - w_n \\ v_{n+1} &=& -u_n + 2v_n - w_n \\ w_{n+1} &=& u_n - v_n + 2w_n \end{array}\right.$$

Calculer le n-ième terme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. On calcule facilement :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \boxed{= 3A - 2I_3.}$$

2. a) On factorise $P = (x-2)(x-1)$. En écrivant la division euclidienne, puisque $\deg(R) < \deg(P)$, $\exists a, b \in \mathbb{R},\ x^n = QP + ax + b$ avec Q un polynôme. On regarde alors l'égalité pour $x = 1$ et $x = 2$ afin de trouver a et b.

$$\left\{\begin{array}{ll} 1^n &= a + b \\ 2^n &= 2a + b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 1^n - b &= a \\ 2^n &= 2 - 2b + b \end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{ll} 2^n - 1 &= a \\ 2 - 2^n &= b \end{array}\right.}$$

   b) On a alors $A^n = Q(A)P(A) + R(A) = 0 + R(A) = R(A)$. Il faut alors écrire les coefficients de $R(A)$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n - 1 & -(2^n-1) \\ -(2^n-1) & 2(2^n-1) - 2 + 2^n & -(2^n-1) \\ 2^n - 1 & -(2^n-1) & 2(2^n-1) - 2 + 2^n \end{pmatrix}$$

   et donc

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n - 1 & 1-2^n \\ 1-2^n & 3.2^n - 4 & 1-2^n \\ 2^n - 1 & 1-2^n & 3.2^n - 4 \end{pmatrix}}$$

3. La relation de récurrence donnée s'exprime, en posant, pour $n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n.$$

On montre alors par une récurrence immédiate (que je vous laisse faire, c'est long à écrire en LaTeX) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n-1 & 1-2^n \\ 1-2^n & 3.2^n-4 & 1-2^n \\ 2^n-1 & 1-2^n & 3.2^n-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut alors directement calculer $u_n = 2(2-2^n) + 2^n - 1 + 1 - 2^n \boxed{= 2(2-2^n)}$.

Exercice 4 : Probabilités et diagonalisation

Lors d'un déménagement, un professeur de mathématiques a rangé ses sujets pour l'ECG1 dans trois cartons : **A**, **B** et **C**. Initialement, les sujets du concours blanc d'algèbre sont dans le carton A. Chaque jour, comme il est extrêmement distrait, il déplace ses sujets selon les règles suivantes :

— Un objet dans le carton A reste dans A avec probabilité $\frac{1}{2}$, est déplacé dans B avec probabilité $\frac{1}{4}$ et dans C avec probabilité $\frac{1}{4}$.

— Un objet dans le carton B est déplacé dans A avec probabilité $\frac{1}{4}$, reste dans B avec probabilité $\frac{1}{2}$ et est déplacé dans C avec probabilité $\frac{1}{4}$.

— Un objet dans le carton C est déplacé dans A avec probabilité $\frac{1}{4}$, est déplacé dans B avec probabilité $\frac{1}{4}$ et reste dans C avec probabilité $\frac{1}{2}$.

On note a_n, b_n et c_n la probabilité que les sujets du concours blanc d'algèbre soient dans chaque carton au jour n, et on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. On rédigera soigneusement.
2. Écrire la matrice dite "de transition" M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.
3. On pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Calculer P^{-1}.
Remarque : l'an prochain, vous saurez trouver P^{-1} et D vous même !

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$ où $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$.
5. a) Exprimer X_n en fonction de M^n et de X_0. En déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   b) Déterminer les limites de ces suites quand $n \to +\infty$. Interpréter ce résultat.

1. On pose, pour tout entier natuerl n, les évènements A_n, B_n et C_n correspondant au fait que les sujets soient dans le carton A, B ou C au jour n. On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (A_n, B_n, C_n). On a donc :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n) + P(A_{n+1} \cap C_n) \\ &= P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) \\ &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n. \end{aligned}$$

Les valeurs des probabilités conditionnelles sont données dans l'énoncé.
D'où :

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n}$$

De même :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= P(B_{n+1}) \\ &= P(B_{n+1} \cap A_n) + P(B_{n+1} \cap B_n) + P(B_{n+1} \cap C_n) \\ &= P_{A_n}(B_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(B_{n+1})P(C_n) \\ &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= P(C_{n+1}) \\ &= P(C_{n+1} \cap A_n) + P(C_{n+1} \cap B_n) + P(C_{n+1} \cap C_n) \\ &= P_{A_n}(C_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(C_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(C_{n+1})P(C_n) \\ &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n}$$

2. La matrice de transition est :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

puisque $X_{n+1} = MX_n$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

3. On calcule P^{-1} en résolvant le système $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On a :

$$\begin{cases} x+y+z &= a \\ x-y &= b \\ x-z &= c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= a \\ -2y-z &= b-a \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ -y-2z &= c-a \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= a \\ -2y-z &= b-a \\ -3z &= 2c-2a-b+a \quad (L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= a \\ -2y-z &= b-a \\ z &= \dfrac{a+b-2c}{3} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{a+b+c}{3} \\ y &= \dfrac{a-2b+c}{3} \\ z &= \dfrac{a+b-2c}{3} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a+b+c \\ a-2b+c \\ a+b-2c \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

4. On va effectuer en premier le calcul de PDP^{-1} : je passe les détails du calcul, mais on trouve :

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = M.$$

On peut maintenant montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$:
Initialisation : Pour $n = 0$, $M^0 = I_3 = PD^0P^{-1}$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $M^k = PD^kP^{-1}$.
Montrons que $M^{k+1} = PD^{k+1}P^{-1}$:

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M^kM \\ &= (PD^kP^{-1})M \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= PD^kP^{-1}PDP^{-1} \quad (\text{car } M = PDP^{-1}) \\ &= P(D^kD)P^{-1} \quad \text{car } PP^{-1} = I_3 \\ &= PD^{k+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Conclusion : Par application du principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ M^n = PD^nP^{-1}.}$

5. a) Par récurrence immédiate, $X_n = M^nX_0$. Écrivons-la rapidement !
Initialisation : Pour $n = 0$, $X_0 = M^0X_0 = I_3X_0 = X_0$. C'est vrai.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $X_k = M^kX_0$.
Montrons que $X_{k+1} = M^{k+1}X_0$:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= MX_k \quad \text{(par définition de la suite)} \\ &= M(M^kX_0) \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= M^{k+1}X_0. \end{aligned}$$

Conclusion : Par application du principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^nX_0$.

On calcule ensuite $X_n = PD^nP^{-1}X_0$:

$$\begin{aligned} X_n &= PD^nP^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}PD^n\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}P\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{4^n}\\\frac{1}{4^n}\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+\frac{2}{4^n}\\1-\frac{1}{4^n}\\1-\frac{1}{4^n}\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Avec $X_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, on obtient :

$$\boxed{a_n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right), \quad b_n = c_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}$$

b) Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, $\frac{1}{4^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et on obtient $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}}$.

Interprétation : À long terme, les sujets ont une probabilité $\frac{1}{3}$ de se trouver dans chacun des trois cartons, quelle que soit leur position initiale.

Exercice 5 : Probabilités

On considère une urne initialement constituée d'une boule blanche et d'une boule noire.

Expérience 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette expérience, on effectue n tirages d'une boule dans l'urne avec remise de la boule tirée. On introduit Y, la variable aléatoire égale au numéro du tirage où l'on obtient une boule blanche pour la première fois, si un tel tirage existe, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. a) Justifier soigneusement $Y(\Omega)$ et déterminer $P(Y=0)$.
   b) Déterminer pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $P(Y=k)$.
   c) Vérifier par le calcul que : $\sum_{k\in Y(\Omega)} P(Y=k) = 1$.

2. a) Pour $x \neq 1$, rappeler et démontrer la formule $\sum_{k=0}^{n} x^k = \cdots$.
   b) Pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.
   c) En déduire $E(Y)$. On ne cherchera pas à simplifier le résultat obtenu.

Expérience 2

On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le $(k+1)$-ième tirage (c'est-à-dire après le k-ième tirage). En particulier, on a $X_0 = 1$.

3. Déterminer la loi de X_1. Calculer son espérance et sa variance.

4. Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{1}{6}$$

5. a) Préciser l'ensemble $X_k(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X_k.
   b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}(X_k = 1) = \dfrac{1}{(k+1)!}$.
   c) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $\mathbb{P}(X_k = k+1)$.
6. a) Soit $j \in X_k(\Omega)$. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche au $(k+1)$-ième tirage sachant $[X_k = j]$, ainsi que celle d'obtenir une boule noire au $(k+1)$-ième tirage sachant $[X_k = j]$.
   b) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in X_{k+1}(\Omega), \quad \mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \frac{i}{k+2}\mathbb{P}(X_k = i) + \frac{k+3-i}{k+2}\mathbb{P}(X_k = i-1) \quad (*)$$

7. À l'aide de la formule $(*)$, déterminer la loi de X_3.
8. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $a_k = (k+1)! \times \mathbb{P}(X_k = 2)$.
   a) Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k et de k.
   b) Montrer que la suite $(b_k)_{k \geqslant 0}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N}, b_k = a_k + k + 2$ est géométrique.
   c) En déduire alors que : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_k = 2) = \dfrac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}$.
9. Soit Y_k la variable aléatoire égale au nombre de boules noires présentes dans l'urne après k tirages. Justifier que X_k et Y_k ont même espérance. En déduire la valeur de $E(X_k)$.

Expérience 1

1. a) On commence, pour y voir plus clair, par définir les évènements élémentaires :
   $\forall i \in [\![1, n]\!]$, B_i : "la boule tirée au i-ième tirage est blanche" et N_i : "la boule tirée au i-ième tirage est noire".
   On a donc $B_i = \overline{N_i}$. On voit alors que :

$$Y(\Omega) = \{0\} \cup [\![1, n]\!]$$

   car $[Y = 0] = \bigcap_{i=1}^{n} N_i$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, $[Y = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} N_i\right) \cap B_k$.
   Calculons $P(Y = 0)$: c'est la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche en n tirages. Les tirages sont indépendants avec remise, donc :

$$P(Y = 0) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} N_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(N_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{1}{2^n}}$$

   b) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, l'évènement $[Y = k]$ signifie que les $k-1$ premiers tirages sont noirs et le k-ième est blanc. Par indépendance :

$$P(Y = k) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} N_i\right) \times P(B_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2^k}}$$

c) Vérifions que $\sum_{k\in Y(\Omega)} P(Y=k) = 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k\in Y(\Omega)} P(Y=k) &= P(Y=0) + \sum_{k=1}^{n} P(Y=k)\\ &= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \quad \text{(somme géométrique)}\\ &= \frac{1}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n}\\ &\boxed{= 1}\end{aligned}$$

2. a) Pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Démonstration : Soit $S = \sum_{k=0}^{n} x^k$. Alors :

$$xS = \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} x^k$$

Donc $S - xS = 1 - x^{n+1}$, soit $(1-x)S = 1 - x^{n+1}$, d'où $S = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

b) Ici deux méthodes. La première, élégante, consiste à remarquer que la somme demandée est la dérivée par rapport à x de la somme géométrique. La deuxième, plus laborieuse, consiste à faire une récurrence, est plus facile à trouver mais suppose la valeur de droite connue (ce qui est le cas ici). Je vais présenter les deux alternatives.

Méthode 1 : On dérive la formule précédente par rapport à x (possible car polynôme et fraction avec dénominateur non nul). On a, pour tout $x \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

En dérivant membre à membre :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

D'où : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}}$

Méthode 2 : On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} kx^{k-1} = 1 = \frac{1\cdot x^2 - 2\cdot x^1 + 1}{(1-x)^2}$, c'est vrai.

Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\sum_{k=1}^{m} kx^{k-1} = \frac{mx^{m+1} - (m+1)x^m + 1}{(1-x)^2}$.

Motrons que $\sum_{k=1}^{m+1} kx^{k-1} = \dfrac{(m+1)x^{m+2} - (m+2)x^{m+1} + 1}{(1-x)^2}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} kx^{k-1} &= \sum_{k=1}^{m} kx^{k-1} + (m+1)x^m \\
&= \frac{mx^{m+1} - (m+1)x^m + 1}{(1-x)^2} + (m+1)x^m \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{mx^{m+1} - (m+1)x^m + 1 + (m+1)x^m(1-x)^2}{(1-x)^2} \\
&= \frac{mx^{m+1} - (m+1)x^m + 1 + (m+1)x^m(1-2x+x^2)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{mx^{m+1} - (m+1)x^m + 1 + (m+1)x^m - 2(m+1)x^{m+1} + (m+1)x^{m+2}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{(m+1)x^{m+2} - (m+2)x^{m+1} + 1}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : Par application du principe de récurrence, pour tout $x \neq 1$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}}.$$

c) On calcule $E(Y)$:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k \in Y(\Omega)} k \cdot P(Y=k) = 0 \times P(Y=0) + \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1}{2^k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

En utilisant la formule précédente avec $x = \dfrac{1}{2}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4\left(\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^n} + 1\right)$$

Donc :

$$\boxed{E(Y) = 2\left(\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^n} + 1\right) = 2 - \frac{n+2}{2^n}}$$

Expérience 2

3. Après le premier tirage, on a soit tiré blanc (proba $\dfrac{1}{2}$) et ajouté une noire, soit tiré noir (proba $\dfrac{1}{2}$) et ajouté une blanche.

   Donc $X_1 \in \{1, 2\}$ avec $P(X_1 = 1) = P(B_1) = \dfrac{1}{2}$ et $P(X_1 = 2) = P(N_1) = \dfrac{1}{2}$. D'où :

$$E(X_1) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

et

$$\begin{aligned} V(X_1) &= E(X_1^2) - E(X_1)^2 \quad \text{König-Huygens} \\ &= \left(1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2}\right) - \frac{9}{4} \quad \text{théorème du transfert} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{9}{4} \\ &= \boxed{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Pour espérance et variance, on pouvait aussi remarquer (et c'est plus joli, non ?) que $X_1 - 1 \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ et alors $E(X_1) = 1 + E(X_1 - 1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $V(X_1) = V(X_1 - 1) = \frac{1}{4}$.

4. On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet $(X_1 = 1, X_1 = 2)$:
Si $X_1 = 1$: l'urne contient 1 blanche et 2 noires (3 boules). Au 2ème tirage :
   - Proba de tirer blanc : $\frac{1}{3}$, on ajoute une noire $\Rightarrow X_2 = 1$
   - Proba de tirer noir : $\frac{2}{3}$, on ajoute une blanche $\Rightarrow X_2 = 2$

   Si $X_1 = 2$: l'urne contient 2 blanches et 1 noire (3 boules). Au 2ème tirage :
   - Proba de tirer blanc : $\frac{2}{3}$, on ajoute une noire $\Rightarrow X_2 = 2$
   - Proba de tirer noir : $\frac{1}{3}$, on ajoute une blanche $\Rightarrow X_2 = 3$

   Donc :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 2 \cap X_2 = 1) \\ &= P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

   De même :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 2) &= P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}(X_2 = 2) + P(X_1 = 2) \times P_{X_1=2}(X_2 = 2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$P(X_2 = 3) = P(X_1 = 2) \times P_{X_1=2}(X_2 = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

5. a) Après k tirages, on a ajouté k boules à l'urne. Comme on partait d'une urne avec 2 boules, on a au total $k+2$ boules dans l'urne. Donc X_k peut prendre les valeurs $1, 2, \ldots, k+1$, soit $X_k(\Omega) = [\![1, k+1]\!]$.

   b) On montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}$.

   Initialisation : Pour $k = 0$, $\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1 = \frac{1}{(0+1)!}$, c'est vrai.

   Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathbb{P}(X_m = 1) = \frac{1}{(m+1)!}$. Montrons que $\mathbb{P}(X_{m+1} = 1) = \frac{1}{((m+1)+1)!}$:

$$\begin{aligned} P(X_{m+1} = 1) &= P(X_{m+1} = 1 \cap X_m = 1) + \cdots + P(X_{m+1} = 1 \cap X_m = m+1) \\ &\quad \text{Probas totales avec SCE } (X_m = 1, \cdots X_m = m+1) \\ &= P(X_m = 1) \times P_{X_m=1}(X_{m+1} = 1) \quad \text{Dans tous les autres cas c'est 0} \\ &= \frac{1}{(m+1)!} \times \frac{1}{m+2} \quad \text{il y a } m+2 \text{ boules dans l'urne au } (m+1)\text{-ième tirage} \\ &= \boxed{\frac{1}{(m+2)!}} \end{aligned}$$

Conclusion : Par application du principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_k = 1) = \dfrac{1}{(k+1)!}$.

c) On peut remarquer ici que la situation des boules blanches et oires initiale est idnetique, et les règles d'évolution sont symétriques, donc $\mathbb{P}(X_k = k+1) = \mathbb{P}(X_k = 1)$ car s'il y a $k+1$ blanches c'est qu'il y a 1 boule noire. On trouve alors

$$\mathbb{P}(X_k = k+1) = \boxed{\frac{1}{(k+1)!}}.$$

6. a) Soit $j \in X_k(\Omega)$. Si $[X_k = j]$ est réalisé, il y a j blanches et $k+2-j$ noires dans l'urne. Donc :

$$P_{X_k=j}(\text{tirer blanc au } (k+1)\text{-ième tirage}) = \frac{j}{k+2}$$

et

$$P_{X_k=j}(\text{tirer noir au } (k+1)\text{-ième tirage}) = \frac{k+2-j}{k+2}.$$

b) En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet $(X_k = 1, X_k = 2, \ldots, X_k = k+1)$:

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = i) &= P(X_{k+1} = i \cap X_k = 1) + P(X_{k+1} = i \cap X_k = 2) + \cdots + P(X_{k+1} = i \cap X_k = k+1) \\ &\quad \text{Probas totales avec SCE } (X_k = 1, \cdots X_k = k+1) \\ &= P(X_k = i) \times P_{X_k=i}(X_{k+1} = i) + P(X_k = i-1) \times P_{X_k=i-1}(X_{k+1} = i) \\ &\quad \text{car les autres proba sont nulles} \\ &= P(X_k = i) \times \frac{i}{k+2} + P(X_k = i-1) \times \frac{k+3-i}{k+2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in X_{k+1}(\Omega),\ P(X_{k+1} = i) = \frac{i}{k+2} P(X_k = i) + \frac{k+3-i}{k+2} P(X_k = i-1)}$$

7. On applique la formule $(*)$ pour calculer la loi de X_3.

On connaît déjà la loi de X_2 : $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{6}$, $P(X_2 = 2) = \dfrac{2}{3}$, $P(X_2 = 3) = \dfrac{1}{6}$.

Pour X_3, on a $X_3(\Omega) = [\![1, 4]\!]$. Appliquons $(*)$ avec $k = 2$:

$$P(X_3 = 1) = \frac{1}{4} P(X_2 = 1) + \frac{4}{4} P(X_2 = 0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} + 0 = \boxed{\frac{1}{24}}$$

$$P(X_3 = 2) = \frac{2}{4} P(X_2 = 2) + \frac{3}{4} P(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \boxed{\frac{11}{24}}$$

$$P(X_3 = 3) = \frac{3}{4} P(X_2 = 3) + \frac{2}{4} P(X_2 = 2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{11}{24}}$$

$$P(X_3 = 4) = \frac{4}{4} P(X_2 = 4) + \frac{1}{4} P(X_2 = 3) = 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{24}}$$

Vérification : $\dfrac{1}{24} + \dfrac{11}{24} + \dfrac{11}{24} + \dfrac{1}{24} = \dfrac{24}{24} = 1$.

8. a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $a_k = (k+1)! \times P(X_k = 2)$. Utilisons la formule $(*)$ avec $i = 2$:

$$P(X_{k+1} = 2) = \frac{2}{k+2} P(X_k = 2) + \frac{k+1}{k+2} P(X_k = 1)$$

Donc :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (k+2)! \times P(X_{k+1}=2) \\ &= (k+2)! \times \left(\frac{2}{k+2}P(X_k=2) + \frac{k+1}{k+2}P(X_k=1)\right) \\ &= (k+1)! \times 2 \times P(X_k=2) + (k+1)! \times (k+1) \times P(X_k=1) \\ &= 2a_k + (k+1) \times (k+1)! \times \frac{1}{(k+1)!} \quad \text{car } P(X_k=1) = \frac{1}{(k+1)!} \\ &= \boxed{2a_k + k + 1} \end{aligned}$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculons b_{k+1} :

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= a_{k+1} + (k+1) + 2 \\ &= (2a_k + k + 1) + k + 3 \\ &= 2a_k + 2k + 4 \\ &= 2(a_k + k + 2) \\ &= 2b_k \end{aligned}$$

Donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2.
Calculons b_0 : on a $a_0 = 1! \times P(X_0 = 2) = 1 \times 0 = 0$ (car $X_0 = 1$ avec probabilité 1).
Donc $b_0 = a_0 + 0 + 2 = 2$.
Ainsi : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, b_k = 2 \times 2^k = 2^{k+1}}$

c) On a $b_k = a_k + k + 2$, donc $a_k = b_k - k - 2 = 2^{k+1} - k - 2$.
Or $a_k = (k+1)! \times P(X_k = 2)$, donc :

$$P(X_k = 2) = \frac{a_k}{(k+1)!} = \boxed{\frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}}$$

9. Par symétrie du problème : initialement il y a 1 blanche et 1 noire, et les règles sont symétriques (on ajoute une boule de couleur opposée). Donc à chaque instant, la situation des blanches et des noires est identique en loi.
Plus précisément, Y_k (nombre de noires après k tirages) et X_k (nombre de blanches) ont la même loi, donc $\boxed{E(X_k) = E(Y_k)}$.
Or on sait que le nombre total de boules après k tirages est $k+2$, donc $X_k + Y_k = k + 2$.
En prenant l'espérance : $E(X_k) + E(Y_k) = k + 2$.
Comme $E(X_k) = E(Y_k)$, on obtient : $2E(X_k) = k + 2$, d'où :

$$\boxed{E(X_k) = \frac{k+2}{2}}$$

Exercice 6 : Python

1. a) Établir que, lorsque k est inférieur ou égal à n :

$$\binom{n}{k} = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{n+1}{i} - 1\right).$$

b) Écrire une fonction d'en-tête `def coeffbin(k,n):` permettant de calculer $\binom{n}{k}$ à partir des vecteurs `np.arange(1,k+1)` et `np.ones(k)`.

c) Retrouver ce résultat avec la commande suivante (qu'on justifiera) :

```
np.cumprod(np.arange(n,0,-1)/np.arange(1,n+1))
```

2. On désire créer une matrice de taille $n \times n$ ($n \geq 1$) dont l'élément de la ligne $i+1$ et de la colonne $j+1$ est égal à $\binom{i}{j}$, avec i et j dans $[\![0, n-1]\!]$.

a) Donner une ligne de commande permettant de créer une matrice C de taille $n \times n$ dont les éléments de la première colonne sont égaux à 1 (les autres éléments étant nuls).

b) Écrire une fonction d'en-tête `def triangle_Pascal(n)` qui remplit la matrice C à l'aide de la formule de Pascal et renvoie ainsi la matrice voulue (triangle de Pascal).

Indication : On rappelle que la commande np.cumprod permet de calculer le produit cumulatif des éléments d'un tableau. Par exemple, `np.cumprod(np.array([2,3,4]))` renvoie le tableau `np.array([2,6,24])`.

1. a) On part de la définition du coefficient binomial :

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)}{k!} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{k}(n-i+1)}{k!} \quad \text{en changeant d'indice } i = j+1 \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{k}(n+1-i)}{\prod_{i=1}^{k} i} \quad \text{car } k! = \prod_{i=1}^{k} i \\ &= \boxed{\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{n+1}{i} - 1\right)}\end{aligned}$$

b) On utilise la formule précédente. Le vecteur `np.arange(1,k+1)` contient les valeurs $1, 2, \ldots, k$ et `np.ones(k)` contient k fois la valeur 1.

```
def coeffbin(k, n):
    if k == 0:
        return 1
    a=(n+1) * np.ones(k) # Crée un tableau de taille k avec la valeur n+1
    b = np.arange(1, k+1)
    c= a / b - np.ones(k) # Calcule (n+1)/i - 1 pour i de 1 à k
    return np.prod(c) # Calcule le produit des éléments du tableau c,
    # soit le produit de (n+1)/i - 1 pour i de 1 à k
```

c) La commande `np.arange(n,0,-1)` crée le tableau $[n, n-1, \ldots, 2, 1]$.
La commande `np.arange(1,n+1)` crée le tableau $[1, 2, \ldots, n]$.
Le quotient terme à terme donne : $\left[\frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n}\right]$.
Le produit cumulatif donne alors :

$$\left[\frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1\times 2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}, \ldots, \frac{n!}{n!}\right] = \left[\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots, \binom{n}{n}\right]$$

Donc cette commande renvoie un tableau contenant tous les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour k de 1 à n.

2. a) On crée une matrice de zéros puis on met des 1 dans la première colonne :

```
C = np.zeros((n, n))
C[:, 0] = 1
```

b) On utilise la formule de Pascal : $\binom{i}{j} = \binom{i-1}{j-1} + \binom{i-1}{j}$ pour $j \geq 1$.

```
def triangle_Pascal(n):
    C = np.zeros((n, n))
    C[:, 0] = 1  # Première colonne : tous des 1
    for i in range(1, n):
        for j in range(1, i+1):
```

```
            C[i, j] = C[i-1, j-1] + C[i-1, j]
    return C
```

Remarque : On parcourt j de 1 à i car $\binom{i}{j} = 0$ pour $j > i$, et la première colonne est déjà remplie.

****Bon courage à toutes et tous !****