Devoir Surveillé 5 - Intégrales Généralisées
Convergence, calculs, intégrales de Wallis

La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Ce DS porte sur le chapitre d'intégrales généralisées que nous avons traité de manière accélérée cette semaine, suite à une directive ministérielle urgente.
3. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
4. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

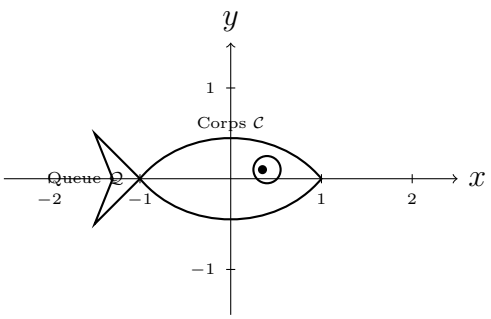
Exercice 1 (Questions de cours)

1. Rappeler la définition d'une intégrale généralisée convergente sur $[a, +\infty[$ et sur $]a, b]$.
2. Énoncer et démontrer le critère de comparaison pour les intégrales généralisées de fonctions positives.
3. Rappeler les intégrales de Riemann : pour quelles valeurs de α l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge-t-elle ? Démontrer ce résultat.

Exercice 2 (Convergence et calculs)
Étudier la convergence des intégrales suivantes. Lorsqu'elles convergent, calculer leur valeur.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$
3. $I_3 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx$
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ (convergence uniquement)

Exercice 3 (Aire d'un domaine plan - Le poisson de Wallis)
On considère un domaine plan $\mathcal{D}$ ayant la forme d'un "poisson", représenté ci-dessous.



Ce domaine est composé de deux parties :

- Le **corps** $\mathcal{C}$, délimité par les courbes $y = f(x) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ et $y = g(x) = -\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ pour $x \in [-1, 1]$.
- La **queue** $\mathcal{Q}$, qui est le triangle de sommets $A(-1, 0)$, $B(-1{,}5\ ;\ 0{,}5)$ et $C(-1{,}5\ ;\ -0{,}5)$.

Partie A - Aire du corps

1. Justifier que le corps $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
2. En déduire que l'aire $\mathcal{A}_\mathcal{C}$ du corps s'écrit :
$$\mathcal{A}_\mathcal{C} = 2\int_{-1}^{1} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx.$$
3. Effectuer le changement de variable $u = \frac{\pi x}{2}$ pour montrer que :
$$\mathcal{A}_\mathcal{C} = \frac{4}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\, du.$$
4. En utilisant la parité de $\cos^2$, montrer que :
$$\mathcal{A}_\mathcal{C} = \frac{8}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\, du = \frac{8}{\pi}W_2$$
où W_2 est l'intégrale de Wallis d'indice 2.
5. En utilisant la relation de récurrence $W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2}$, calculer W_2.
6. En déduire que $\mathcal{A}_\mathcal{C} = 2$.

Partie B - Aire de la queue

7. Calculer l'aire $\mathcal{A}_\mathcal{Q}$ du triangle ABC par la méthode de votre choix.
On rappelle que l'aire d'un triangle de sommets (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) est :
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|.$$
8. En déduire l'aire totale $\mathcal{A}_\mathcal{D}$ du poisson.

Partie C - Généralisation

9. On considère maintenant un corps généralisé délimité par $y = \pm\cos^{2n}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que son aire vaut :
$$\mathcal{A}_n = \frac{8}{\pi}W_{2n} = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{4(2n)!}{4^n(n!)^2}.$$
10. Calculer $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$.
11. Déterminer la limite de $\mathcal{A}_n$ quand $n \to +\infty$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Problème - Intégrales de Wallis (morceau de sujet HEC)

Ce problème a pour objectif d'étudier les intégrales de Wallis et d'en déduire plusieurs résultats remarquables, dont la formule de Stirling et le produit de Wallis pour π.

Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale de Wallis :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx.$$

Partie I - Premières propriétés

1. Justifier que W_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Calculer W_0 et W_1.

3. a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a la relation de récurrence :

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}.$$

On pourra effectuer une intégration par parties.

b) En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

4. a) Montrer que la suite $(W_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$: $\quad \dfrac{W_{n+1}}{W_{n-1}} \leq \dfrac{W_n}{W_{n-1}} \leq 1.$

c) En déduire que $W_n \sim W_{n+1}$ quand $n \to +\infty$.

5. a) Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$W_{2n} \cdot W_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}.$$

b) En déduire un équivalent de W_n quand $n \to +\infty$.

Partie II - Le produit de Wallis

6. a) Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}.$$

b) En utilisant l'équivalent de W_n, montrer que :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}.$$

C'est la célèbre formule du produit de Wallis.

7. Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}$.

a) Montrer que $\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{4k^2-1}\right)$.

b) En déduire que la suite $(\ln(u_n))$ converge et préciser sa limite.

c) Donner une valeur approchée de u_{10} et comparer à $\frac{\pi}{2}$.

Partie III - Vers la formule de Stirling

On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ *pour* $n \geq 1$, *et* $0! = 1$.

8. On pose, pour $n \geq 1$: $\quad v_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$.

   a) Montrer que pour tout $n \geq 1$:

   $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-1}.$$

   b) On admet que $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = e \cdot \exp\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)n^k}\right)$.

   Montrer que la suite (v_n) converge vers une limite $\ell > 0$.

9. a) En utilisant les expressions de W_{2n} et W_{2n+1} obtenues à la question 3, montrer que :

   $$\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{((2n)!)^2}{4^{2n}(n!)^4} \cdot (2n+1).$$

   b) En déduire que :

   $$\frac{v_{2n}^2}{v_n^4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}.$$

   c) En déduire la valeur de ℓ^2, puis celle de ℓ.

   d) Énoncer la formule de Stirling.

10. **(Question bonus très difficile)**

    On pose $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(x)}{x^n}\,dx$ pour $n \geq 2$.

    a) Justifier la convergence de J_n.

    b) Montrer que $J_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

    c) On admet que $J_n = \dfrac{\pi}{2^n(n-1)!} \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (n-2k)^{n-1}$.

    Calculer J_3 et J_4.

Exercice 4 - La loi de Poisson et ses mystères

Dans cet exercice, $\lambda > 0$ est un paramètre réel fixé. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Partie A - Préliminaires

1. Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
   a) Vérifier que $(P(X = k))_{k\in\mathbb{N}}$ définit bien une loi de probabilité.
   b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
   c) Montrer que $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right) = \dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$.

2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, chacune suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
   a) Montrer que $S_n \sim \mathcal{P}(n)$.
   b) En déduire que : $e^{-n}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}\cdot \mathbf{1}_{k\geq n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$.

   On pourra utiliser le théorème central limite.

Partie B - Approximation et intégrales

On considère une suite (Y_n) de variables aléatoires, où Y_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ pour $n \geq \lambda$.

3. a) Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, montrer que : $P(Y_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

   On reconnaît la convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson.

   b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $P(Y_n = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\cdot\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)$.

4. On définit la fonction $f_\lambda : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot x^k = e^{-\lambda}e^{\lambda x} = e^{\lambda(x-1)}.$$

   a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_\lambda(x)\,dx$.

   b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^k\,dx = \frac{1}{k+1}$ et en déduire :

$$\int_0^1 f_\lambda(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{1}{k+1} = E\left(\frac{1}{X+1}\right).$$

   c) Retrouver ainsi le résultat de la question 1.c).

5. **(Question difficile)** On pose $I_\lambda = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot\frac{(\lambda t)^{\lfloor \lambda t\rfloor}}{\lfloor \lambda t\rfloor !}\,dt$ où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la partie entière.

   a) Justifier que I_λ est bien définie.

b) Montrer que $I_\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k/\lambda}^{(k+1)/\lambda} e^{-t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}\, dt$.

c) En effectuant le changement de variable $u = \lambda t - k$ dans chaque intégrale, montrer que :

$$I_\lambda = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-k/\lambda}}{k!} \int_0^1 e^{-u/\lambda}(k+u)^k\, du.$$

d) Montrer que $I_\lambda \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 1$.

Partie C - Poissons et probabilités conditionnelles

Un lac contient des poissons répartis en deux zones. On note X le nombre de poissons pêchés dans la zone A, et Y le nombre de poissons pêchés dans la zone B, avec $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, où $\lambda, \mu > 0$. On suppose X et Y indépendantes.

6. On pose $S = X + Y$ le nombre total de poissons pêchés.
   a) Montrer que $S \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
      On pourra calculer $P(S = n)$ en utilisant la formule des probabilités totales.
   b) En déduire $E(S)$ et $V(S)$.

7. **(Question difficile)** Calculer $P_{S=n}(X = k)$ pour $0 \leq k \leq n$. Quelle loi reconnaît-on ?
   On utilisera la définition des probabilités conditionnelles et le fait que $(X = k) \cap (S = n) = (X = k) \cap (Y = n - k)$.

8. **(Question bonus)** On suppose maintenant que chaque poisson pêché a une probabilité $p \in]0, 1[$ d'être un bar et $1 - p$ d'être une daurade, indépendamment des autres.
   Soit $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ le nombre total de poissons pêchés. On note B le nombre de bars parmi ces N poissons.
   a) Exprimer $P_{N=n}(B = k)$ pour $0 \leq k \leq n$. Quelle loi reconnaît-on ?
   b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$P(B = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{N=n}(B = k) \cdot P(N = n).$$

   c) En développant cette expression, montrer que $B \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.
      On pourra utiliser le fait que $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} = e^{\lambda(1-p)}$.
   d) Un pêcheur souhaite attraper exactement 2 bars. Calculer la probabilité de cet événement en fonction de λ et p.

Bon courage !