Devoir Surveillé 5 - Version Ecricome

Séries, probabilités discrètes, applications linéaires en dimension finie

La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Rappeler le théorème du rang et sa preuve.
2. Convergence absolue des séries : résultat et preuve.
3. Rappeler les formules d'espérance et de variance pour les lois de Poissons et les lois géométriques, et les démontrer.

Exercice 2 (Edhec - La fin du problème est assez ardue)

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $a_n = \dfrac{1}{n \ln n}$.

   a) Montrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a : $\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k \ln k}$.

   b) En déduire, par sommation, la nature de la série de terme général a_n.

   Dans la suite, on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.
3. a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.

   b) Étudier le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$, lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f.

   c) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis dresser son tableau de variation.

4. a) Établir que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n, tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1.

   b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

   c) Pour tout entier naturel n non nul, calculer $f\left(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ puis en déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a : $u_n \leqslant 1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

   d) En déduire, à l'aide de la première question, que la série de terme général $\dfrac{1}{-n \ln(1-u_n)}$ est divergente.

   e) Conclure, en revenant à la définition de u_n, que la série de terme général $1 - u_n$ est divergente.

1. a) Considérons la fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{t \ln t}$ sur $[2, +\infty[$. Cette fonction est dérivable sur $[2, +\infty[$ comme inverse d'un produit de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. On a, pour tout $t \geq 2$:

$$h'(t) = -\frac{1 + \ln t}{(t \ln t)^2} < 0.$$

Ainsi h est décroissante sur $[2, +\infty[$. Donc pour tout $k \geq 2$ et tout $t \in [k, k+1]$:

$$\frac{1}{t \ln t} \leq \frac{1}{k \ln k}.$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{k \ln k}}$$

b) Pour tout $n \geq 2$, en sommant l'inégalité précédente de $k = 2$ à n :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} \, \mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} = \sum_{k=2}^{n} a_k.$$

Par la relation de Chasles :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln t} \, \mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} a_k.$$

Or $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln t} \, \mathrm{d}t = [\ln(\ln t)]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$

Donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k \to +\infty$ et $\boxed{\text{la série } \textstyle\sum a_n \text{ diverge.}}$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, on a $1 - x > 0$ et $\ln(1-x) \neq 0$, donc f est bien définie et continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Étudions la continuité en 0. Comme $\ln(1+u) \sim_0 u$, on a par substitution $\ln(1-x) \sim_0 -x$. De plus $1 - x \sim_0 1$. Donc :

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} \sim_0 \frac{-x}{1 \times (-x)} = 1 = f(0).$$

Ainsi $f(x) \to f(0)$ quand $x \to 0$, et $\boxed{f \text{ est continue sur }]-\infty, 1[.}$

3. a) Pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1 \cdot (1-x)\ln(1-x) - (-x)\left(-\ln(1-x) + (1-x) \cdot \frac{-1}{1-x}\right)}{(1-x)^2(\ln(1-x))^2} \\ &= \frac{(x-1)\ln(1-x) - x\ln(1-x) - x}{(1-x)^2(\ln(1-x))^2} \\ &= \boxed{\frac{-\ln(1-x) - x}{(1-x)^2(\ln(1-x))^2}} \end{aligned}$$

b) Posons $g(x) = \ln(1-x) + x$ pour $x < 1$. La fonction g est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et :

$$g'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 = \frac{-1+1-x}{1-x} = \frac{-x}{1-x}.$$

Pour $x < 1$: $1 - x > 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $-x$.

x	$-\infty$		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		↗	0	↘	

Ainsi g atteint son maximum en 0, avec $g(0) = \ln(1) + 0 = 0$. Donc $\boxed{\ln(1-x) + x \leq 0 \text{ pour tout } x < 1.}$

Ainsi, pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$:

$$f'(x) = \frac{-(\ln(1-x) + x)}{(1-x)^2(\ln(1-x))^2} \geq 0.$$

Donc f est croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$. Comme f est continue en 0, $\boxed{f \text{ est croissante sur }]-\infty, 1[.}$

c) *Limite en $-\infty$:* $1 - x \sim_{-\infty} -x$, donc :

$$f(x) \sim_{-\infty} \frac{-x}{-x \cdot \ln(1-x)} = \frac{1}{\ln(1-x)} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0.$$

Limite en 1^- : Par croissances comparées, $y \ln y \to 0^-$ quand $y \to 0^+$. Donc $(1-x)\ln(1-x) \to 0^-$ quand $x \to 1^-$, et comme $-x \to -1$:

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty.$$

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$+$	
f	0	↗	$+\infty$

4. a) D'après les questions précédentes, f est continue et strictement croissante sur $[0, 1[$. Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[0, 1[$ sur $f([0, 1[) = [f(0), \lim_{x \to 1^-} f(x)[= [1, +\infty[$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^* \subset [1, +\infty[$, il existe un unique $u_n \in [0, 1[$ tel que $f(u_n) = n$.

De plus, $f(0) = 1$ donc $\boxed{u_1 = 0.}$

b) Deux options ici : **Première option :** Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1, elle converge vers une limite $l \in [0, 1]$. Supposons $l < 1$. Par continuité de f sur $[0, 1[$, on aurait $f(l) = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim_{n \to +\infty} n = +\infty$, ce qui est absurde. Donc $l = 1$ et $\boxed{u_n \to 1 \text{ quand } n \to +\infty.}$

Deuxième option : La bijection réciproque $f^{-1} : [1, +\infty[\to [0, 1[$ est continue et strictement croissante (comme f). Comme $f(x) \to +\infty$ quand $x \to 1^-$, on a $f^{-1}(y) \to 1$ quand $y \to +\infty$.

Or $u_n = f^{-1}(n)$ pour tout $n \geq 1$, donc $\boxed{u_n \to 1 \text{ quand } n \to +\infty.}$

c) Pour tout $n > 1$, posons $x_n = 1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$. Alors :

$$f(x_n) = \frac{-(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}})}{\frac{1}{n\sqrt{n}} \cdot \ln\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)} = \frac{-(n\sqrt{n} - 1)}{-\ln(n\sqrt{n})} = \frac{n\sqrt{n} - 1}{\frac{3}{2}\ln n}.$$

Donc $\dfrac{f(x_n)}{n} = \dfrac{\sqrt{n} - \frac{1}{n}}{\frac{3}{2}\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par croissances comparées.

Il existe donc n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $\frac{f(x_n)}{n} \geq 1$, c'est-à-dire $f(x_n) \geq n = f(u_n)$.

Comme f est strictement croissante, on a $\boxed{u_n \leq 1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \text{ pour tout } n \geq n_0.}$

d) Pour $n \geq n_0$: $\dfrac{1}{n\sqrt{n}} \leq 1 - u_n$, donc $-\ln(1 - u_n) \leq -\ln\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right) = \dfrac{3}{2}\ln n$ car ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi : $\dfrac{1}{-n\ln(1 - u_n)} \geq \dfrac{1}{n \cdot \frac{3}{2}\ln n} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{n \ln n}$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ diverge (question 1), par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum \dfrac{1}{-n\ln(1 - u_n)} \text{ diverge.}}$

e) Par définition, $f(u_n) = n$, soit $\dfrac{-u_n}{(1 - u_n)\ln(1 - u_n)} = n$ pour $n \geq 2$.

Donc $1 - u_n = \dfrac{-u_n}{n\ln(1 - u_n)}$.

Comme $u_n \to 1$, on a $-u_n \to -1$, donc :

$$1 - u_n \sim \frac{-1}{n\ln(1 - u_n)} = \frac{1}{-n\ln(1 - u_n)}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum(1 - u_n)$ et $\sum \dfrac{1}{-n\ln(1 - u_n)}$ sont de même nature.

Comme cette dernière diverge (question 4d), $\boxed{\text{la série } \sum(1 - u_n) \text{ diverge.}}$

Problème : Ecricome

Une urne contient initialement une boule, blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.
On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le $(k+1)$-ème tirage. En particulier, on a $X_0 = 1$. On admet que pour tout entier k, X_k est une variable aléatoire de $(\Omega, \mathscr{T}, P)$.

Partie A

1. Déterminer la loi de X_1. Donner son espérance et sa variance.

2. Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par :
$$P([X_2 = 1]) = \frac{1}{6}, \quad P([X_2 = 2]) = \frac{2}{3}, \quad P([X_2 = 3]) = \frac{1}{6}.$$

3. Préciser l'ensemble $X_k(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X_k.

4. Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$. Déterminer $P_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i])$.
(On distinguera différents cas selon les valeurs relatives de i et j).

5. Déduire de ce qui précède que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad P([X_{k+1} = i]) = \frac{i}{k+2} P([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2} P([X_k = i-1]). \quad (*)$$

6. À l'aide de la formule $(*)$, déterminer la loi de X_3.

7. a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $P([X_k = 1]) = \frac{1}{(k+1)!}$.

   b) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $P([X_k = k+1])$.

   c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $a_k = (k+1)! \times P([X_k = 2])$.
   Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k et de k.
   Montrer que la suite $(b_k)_{k\geq 0}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N},\ b_k = a_k + k + 2$ est géométrique.
   En déduire alors que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P([X_k = 2]) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}.$$

Partie B

8. Que renvoie la fonction `Python` suivante pour un entier k non nul ?
Détailler le fonctionnement de la ligne 5.

```
1  def mystere(k):
2      n = 1
3      b = 1
4      for i in range(k):
5          r = np.floor(rd.random()*(n+b)+1)
6          if r>n :
7              n = n+1
8          else :
9              b = b+1
10     return(b)
```

9. Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def loi_exp(k,N)` qui prend en entrée un entier strictement positif k et un entier N, qui effectue N simulations de k tirages successifs dans l'urne et qui retourne un vecteur `LE` qui contient une estimation de la loi de X_k (c'est-à-dire que pour chaque $i \in [\![1, k+1]\!]$, `LE[i-1]` contient la fréquence d'apparition de l'événement $[X_k = i]$ au cours des N simulations).

   On pourra utiliser la fonction `mystere`.

10. Recopier et complèter la fonction `loi_theo` suivante, qui prend en entrée un entier strictement positif n, afin qu'elle retourne un vecteur `LT` qui contient la loi théorique de X_n.

```
def loi_theo(n):
    M = np.zeros((n+1,n+1))
    M[0,0] = 1
    M[1,0] = 1/2
    M[1,1] = 1/2
    for k in range(1,n):
        M[k+1,0] = .........
        for i in range(1,k+1):
            M[k+1,i] = .........
    M[k+1,k+1] = .........
    LT = .........
    return(LT)
```

11. Un étudiant nous propose comme loi de X_5 le résultat suivant :

k	1	2	3	4	5	6
$P([X_5 = k])$	0.001368	0.079365	0.419434	0.418999	0.079454	0.00138

   A-t-il utilisé `loi_exp` ou bien `loi_theo` ?

Partie C

12. a) À l'aide de la formule $(*)$, montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad E(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2} E(X_k) + 1.$$

   b) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad E(X_k) = \frac{k+2}{2}.$$

   c) Soit Y_k la variable aléatoire égale au nombre de boules noires prèsentes dans l'urne après k tirages.

   Justifier que X_k et Y_k ont même espérance, puis retrouver le résultat de la question précèdente.

   On admettra pour la suite que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad V(X_k) = \frac{k+2}{12}.$$

13. **Non faisable pour l'instant. Nécessite Markov et BT et la notion de convergence en probabilité.**

   a) Soit $\alpha > 0$. Montrer que :

$$\lim_{k \to +\infty} P\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| < \alpha\right) = 1.$$

   b) Interpréter ce résultat et le justifier intuitivement.

Partie D

14. Pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq j < i$, on définit l'application $\varphi_{i,j}$ par :

$$\varphi_{i,j} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ P & \longmapsto & jP(x+1) - iP(x) \end{array}.$$

a) Montrer que $\varphi_{i,j}$ est linéaire.

b) Pour $P \in \mathbb{R}[x]$, montrer que $\deg(\varphi_{i,j}(P)) = \deg(P)$.

c) En déduire que $\varphi_{i,j}$ est injective.

d) Montrer que pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}[x]$, il existe un polynôme Q dans $\mathbb{R}[x]$ tel que $\varphi_{i,j}(Q) = P$.

(Pour P non nul, on pourra s'intéresser à la restriction de $\varphi_{i,j}$ à $\mathbb{R}_n[x]$ où n est le degré de P).

Ce qui précède montrant que $\varphi_{i,j}$ est un automorphisme, on définit le polynôme $P_{i,j}$ pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq j \leq i$, en posant :

$$P_{1,1}(x) = 1, \quad \text{et pour } 1 \leq j < i, \quad P_{i,j}(x) = \varphi_{i,j}^{-1}\left((3 + x - i)P_{i-1,j}(x)\right),$$

et enfin pour tout entier $i > 1$,

$$P_{i,i}(x) = -\sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0).$$

15. a) Vérifier que : $P_{2,1}(x) = -x - 2$, puis calculer $P_{2,2}(x)$.

b) Vérifier que : $P_{3,2}(x) = -2x - 4$.

On admettra dans la suite que : $P_{3,1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$ et $P_{3,3}(x) = 3$.

16. On considère, pour tout entier i de $\mathbb{N}^*$, la propriété suivante :

$$\mathscr{H}_i : \text{« } \forall k \in \mathbb{N},\ P([X_k = i]) = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=1}^{i} P_{i,j}(k)j^k \text{ ».}$$

On souhaite montrer par récurrence que, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, $\mathscr{H}_i$ est vraie.

a) Montrer que $\mathscr{H}_1$ est vraie.

b) Soit $i > 1$. On suppose que $\mathscr{H}_{i-1}$ est vraie et on pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k = (k+1)!P([X_k = i]) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k)j^k.$$

En utilisant la formule $(*)$ et la relation $(3 + x - i)P_{i-1,j}(x) = \varphi_{i,j}(P_{i,j}(x))$, montrer que la suite $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ est géométrique.

Déterminer α_0 et en déduire que $\mathscr{H}_i$ est vraie.

c) Conclure.

17. a) En utilisant le résultat de la question 15.(a), retrouver le résultat de la question 7.(c).

b) Déterminer $P([X_k = 3])$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Ce corrigé a été rédigé par Mathieu Mansuy, ancien prof de deuxième année qui faisait un travail exceptionnel.

Partie A

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons B_k l'événement « on a pioché une boule blanche au k-ème tirage », et $N_k = \overline{B}_k$, c'est-è-dire l'événement « on a pioché une noire au k^e tirage ».

Avant le deuxième tirage, il y a soit 2 boules blanches et une noire dans l'urne si on a

pioché une boule noire au premier tour, soit 1 boule blanches et deux boules noires si on a pioché une boule blanche au premier tour.

Ainsi, $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$, et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X_1 = 2) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$.

On reconnaît une loi uniforme sur $[\![1, 2]\!]$, d'où $\boxed{E(X_1) = \frac{3}{2} \text{ et } V(X_1) = \frac{4-1}{12} = \frac{1}{4}.}$

2. Lors de deux tirages, on peut extraire soit deux boules noires, soit deux boules blanches, soit une boule blanche puis une boule noire ou l'inverse. Ainsi, X_2 peut valoir 3 ou 2 ou 1, soit $X_2(\Omega) = [\![1, 3]\!]$. $[X_2 = 1]$ est réalisé si, et seulement si, $B_1 \cap B_2$ l'est. D'où (è l'aide de la formule des probabilités composées, les événements B_1 et B_2 n'ètant pas indépendants) :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

car lorsque B_1 est réalisé, le deuxième tirage se fait dans une urne avec une boule blanche et deux boules noires.

De même $[X_2 = 3]$ est réalisé si, et seulement si, $N_1 \cap N_2$ l'est réalisé. D'où :

$$\mathbb{P}([X_2 = 3]) = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Enfin, $\mathbb{P}([X_2 = 2]) = 1 - \mathbb{P}([X_2 = 1]) - \mathbb{P}([X_2 = 3]) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

3. Lors de k tirages, on peut extraire entre 0 et k boules blanches. Après ceux-ci, l'urne peut donc contenir entre 1 blanche et $k + 1$ blanches (en comptant la boule blanche qui est présente dès le dèbut). Ainsi, $\boxed{X_k(\Omega) = [\![1, k + 1]\!].}$

4. Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [\![1, k + 1]\!]$. Après le $(k + 1)$-ème tirage, il y a $k + 2$ boules dans l'urne car on ajoute une boule à chaque tirage. Le tirage $k + 1$ amène une boule blanche ou une boule noire. À son issue, le nombre de boules blanches est donc stable ou est augmenté de 1. Par conséquent, $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i]) = 0$ $i \neq j$ et $i \neq j + 1$.

Selon le protocole, le nombre de boules blanches reste constant après un tirage si, et seulement si, on tire une boule blanche. Ainsi, $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = j])$ est la probabilité de sortir une boule blanche dans une urne contenant $k + 2$ boules dont j boules blanches, d'où $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = j]) = \frac{j}{k+2}$.

De mème, le nombre de boules blanches augmente de 1 après un tirage si, et seulement si, on sort une boule noire. Le réel $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = j + 1])$ est la probabilité de sortir une boule noire dans une urne contenant j boules blanches et $k + 2$ boules au total, d'où $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = j + 1]) = \frac{k+2-j}{k+2}$.

5. Soit $k \in \mathbb{N}$, si $i \notin [\![1, k+2]\!] = X_{k+1}(\Omega)$, alors $\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = 0$ et comme $i-1 \notin [\![1, k+1]\!] = X_k(\Omega)$, on a aussi $\mathbb{P}(X_k = i) = \mathbb{P}(X_k = i - 1) = 0$. Donc la formule $(*)$ est vraie dans ce cas.

Supposons $i = k+2$, alors $[X_{k+1} = k+2]$ est réalisé si, et seulement si, $[X_k = k+1] \cap N_{k+1}$ est réalisé car le nombre maximal de boules blanches après k tirages est $k + 1$. Donc $\mathbb{P}(X_{k+1} = k + 2) = \mathbb{P}(X_k = k + 1)P_{[X_k=k+1]}(N_{k+1}) = \mathbb{P}(X_k = k + 1) \times \frac{1}{k+2}$. D'autre part, $(k + 2) \notin X_k(\Omega)$, d'où $\mathbb{P}(X_k = k + 2) = 0$. On observe donc que la formule

$$\mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \frac{i}{k+2}\mathbb{P}([X_k = i]) + \frac{3 + k - i}{k + 2}\,\mathbb{P}([X_k = i - 1]) \qquad (*)$$

est vraie pour $i = k + 2$.

Supposons $i \in [\![1, k+1]\!]$, On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[X_k = j]\}_{1 \leq j \leq k+1}$:

$$\mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{P}(X_k = j)\mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i).$$

Puisque $\mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i) = 0$ lorsque $i \neq j$ et $i \neq j+1$, cette somme se simplifie :

$$\mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \mathbb{P}(X_k = i)\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i) + \mathbb{P}(X_k = i-1)\mathbb{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1} = i).$$

On a vu que $\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i) = \frac{i}{k+2}$.

Si $i = 1$, alors $\mathbb{P}(X_k = i-1) = \mathbb{P}(X_k = 0) = 0$ et la formule $(*)$ est valable pour $i = 1$.

Sinon, la question précédente avec $j = i-1$ donne $\mathbb{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1} = i) = \frac{k+2-(i-1)}{k+2} = \frac{k+3-i}{k+2}$, et donc :

$$\boxed{\mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \frac{i}{k+2}\ P([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2}\ P([X_k = i-1]).}$$

La formule $(*)$ est donc bien satisfaite pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

6. Avec ce qui prècède, $X_3(\Omega) = [\![1, 4]\!]$, et $\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{24}$, $\mathbb{P}(X_3 = 4) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{1}{24}$, puis :

$$\mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{2}{4}\mathbb{P}(X_2 = 2) + \frac{3}{4}\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$$

et $\mathbb{P}(X_3 = 3) = 1 - \mathbb{P}(X_3 = 1) - \mathbb{P}(X_3 = 2) - \mathbb{P}(X_3 = 4) = \frac{11}{24}$.

7. a) À l'aide de la question 5 avec $i = 1$ et $\mathbb{P}(X_k = 0) = 0$, on obtient $\mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{k+2}\mathbb{P}(X_k = 1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par une récurrence immédiate, on obtient :

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}\mathbb{P}(X_0 = 1) \boxed{= \frac{1}{(k+1)!}.}$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. La question 5 avec $i = k+2$ donne (en notant que $\mathbb{P}(X_k = k+2) = 0$) :

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = k+2) = \frac{3+k-(k+2)}{k+2}\mathbb{P}(X_k = k+1) = \frac{1}{k+2}\mathbb{P}(X_k = k+1).$$

Avec $\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1$, une récurrence immédiate donne $\boxed{\mathbb{P}(X_k = k+1) = \frac{1}{(k+1)!}.}$

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (k+2)!\mathbb{P}(X_{k+1} = 2) = (k+2)!\left(\frac{2}{k+2}\ P([X_k = 2]) + \frac{3+k-2}{k+2}\ P([X_k = 1])\right) \\ &= (k+2)!\left(\frac{2}{k+2}\frac{a_k}{(k+1)!} + \frac{3+k-2}{k+2}\frac{1}{(k+1)!}\right) = 2a_k + k + 1 \end{aligned}$$

Définissons la suite (b_k) par $b_k = a_k + k + 2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$b_{k+1} = a_{k+1} + k + 1 + 2 = 2a_k + k + 1 + k + 3 = 2(a_k + k + 2) = 2b_k.$$

La suite (b_k) est géométrique de raison 2, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$b_k = 2^k b_0 = 2^k(a_0 + 2) = 2^{k+1}$$

car $\mathbb{P}(X_0 = 2) = 0$. En substituant, on obtient $a_k = 2^{k+1} - k - 2$ et $\boxed{\mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{2^{k+1}-k-2}{(k+1)!}}$.

Partie B

8. Détaillons déjà le fonctionnement de la ligne 5. La commande `rd.random()` renvoie une réalisation d'une variable suivant une loi uniforme sur $[0, 1[$. Par transformation affine, `rd.random()*(n+b)+1` renvoie une réalisation d'une variable suivant une loi uniforme sur $[1, n + b + 1[$. Et en prenant la partie entière, `r = np.floor(rd.random()*(n+b)+1)` est donc un nombre entier pris au hasard dans $[\![1, n + b]\!]$ (de manière uniforme).

   Les variables `n` et `b` représentent le nombre de boules blanches et de boules noires dans l'urne. On effectue k tirages successifs è l'aide de la boucle `for`. À chaque tirage, on imagine avoir numéroté les boules noires de 1 è n, et les boules blanches de $n + 1$ è $n + b$. On tire au hasard une boule dans l'urne, ce qui revient è choisir un entier `r` au hasard dans $[\![1, n + b]\!]$. Si `r >n`, alors cela correspond è sortir une boule blanche de l'urne. Dans ce cas, on augmente le nombre de boules noires de 1 en faisant `n = n+1`. Sinon, cela correspond è un tirage d'une boule noire, et on augmente alors le nombre `b` de boules blanches de 1. On renvoie enfin le nombre `b` de boules blanches contenues dans l'urne après `k` tirages. Cela correspond donc è une réalisation de la variable X_k.

9. On commence par crèer un vecteur `u` contenant N réalisations de la variable X_k. Pour cela, on utilise une boucle `for` et la fonction `mystere(k)`.

   Ensuite, on crèe un vecteur `LE` de taille $k + 1$ (dont les composantes vont de 0 è k). On effectue une boucle `for` afin de parcourir ce vecteur, et de placer dans `LE[i-1]` la frèquence d'apparition de `i` dans `u`. Pour cela, on utilisera la commande `np.mean(u==i)`.

```
1  def loi_exp(k,N):
2      u = np.zeros(N)
3      for j in range(N):
4          u[j] = mystere(k)
5      LE = np.zeros(k+1)
6      for i in range(1,k+2):
7          LE[i-1] = np.mean(u==i)
8      return(LE)
```

10. La matrice M est telle que $[M]_{k,i} = \mathbb{P}(X_k = i - 1)$. On fera attention au dècalage de numèrotation (qui commence è 0 avec `Python`). On utilise les questions 7.(a) et 7.(b) pour complèter les lignes 7 et 10, la formule $(*)$ pour la ligne 9. Pour la ligne 10, on extrait la dernière ligne de la matrice M qui contient la loi de X_n.

```python
def loi_theo(n):
    M = np.zeros((n+1,n+1))
    M[0,0] = 1
    M[1,0] = 1/2
    M[1,1] = 1/2
    for k in range(1,n):
        M[k+1,0] = M[k,0]/(k+2)
        for i in range(1,k+1):
            M[k+1,i] = ((i+1)/(k+2))*M[k,i]+((2+k-i)/(k+2))*M[k,i-1
]
    M[k+1,k+1] = M[k+1,0]
    LT = M[n,:]
    return(LT)
```

11. En théorie, $\mathbb{P}(X_5 = 1) = \mathbb{P}(X_5 = 6) = \frac{1}{6!}$, alors que dans le tableau, les valeurs sont distinctes. Donc c'est un calcul expérimental obtenu avec `loi_exp`.

Partie C

12. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k(\Omega)$ est fini donc admet une espérance.

Calculons :

$$\begin{aligned}
E(X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+2} i\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{i=1}^{k+2} i\left(\frac{i}{k+2}\, P\left([X_k = i]\right) + \frac{3+k-i}{k+2}\mathbb{P}\left([X_k = i-1]\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k+2} \frac{i^2}{k+2}\mathbb{P}\left([X_k = i]\right) + \sum_{i=1}^{k+2} i\frac{3+k-i}{k+2}\mathbb{P}\left([X_k = i-1]\right) \\
&= \frac{1}{k+2}E(X_k^2) + \sum_{j=0}^{k+2}(j+1)\frac{3+k-j-1}{k+2}\mathbb{P}\left([X_k = j]\right) \quad \text{par thèorème de transfert} \\
&= \frac{1}{k+2}E(X_k^2) + \sum_{j=1}^{k+1}(j+1)\frac{2+k-j}{k+2}\mathbb{P}\left([X_k = j]\right) \quad \text{car } X_k(\Omega) = [\![1, k+1]\!] \\
&= \frac{1}{k+2}E(X_k^2) + \frac{1}{k+2}E((X_k+1)(2+k-X_k)) \quad \text{par thèorème de transfert} \\
&= \frac{1}{k+2}E\left(X_k^2 + (2+k)X_k - X_k^2 + 2 + k - X_k\right) \\
&= \frac{1}{k+2}E\left((1+k)X_k + 2 + k\right) \boxed{= \frac{1+k}{k+2}E\left(X_k\right) + 1.}
\end{aligned}$$

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{H}_k$:<< $\left(E(X_k) = \frac{k+2}{2}\right)$ >> .

Init. X_0 ètant constante ègale è 1, $E(X_0) = 1 = \frac{0+2}{2}$. D'où $\mathscr{H}_0$ vraie.

Hèr. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{H}_k$ vraie, soit $E(X_k) = \frac{k+2}{2}$. Avec la question précédente :

$$E(X_{k+1}) = \frac{1+k}{k+2}E(X_k) + 1 = \frac{1+k}{k+2}\frac{k+2}{2} + 1 = \frac{k+3}{2}.$$

D'où la propriètè $\mathscr{H}_{k+1}$ vraie.

Concl. Par principe de rècurrence, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ E(X_k) = \frac{k+2}{2}.}$

c) Le rèle jouè par les boules blanches et les boules noires durant cette expèrience alèatoire ètant exactement le mème, X_k et Y_k suivent la mème loi par symètrie. Elles

ont en particulier mème espèrance, et satisfont $X_k + Y_k = k + 2$ puisque $X_k + Y_k$ correspond au nombre de boules dans l'urne après k tirages. Ainsi :

$$2E(X_k) = E(X_k) + E(Y_k) = E(X_k + Y_k) = k + 2.$$

Ainsi, $\boxed{E(X_k) = E(Y_k) = \frac{k+2}{2}.}$

13. a) Soit $\alpha > 0$. La variable X_k admet une variance, donc $\frac{X_k}{k+2}$ ègalement. On peut lui appliquer l'inègalitè de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - E\left(\frac{X_k}{k+2}\right)\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{V\left(\frac{X_k}{k+2}\right)}{\alpha^2}.$$

D'où :

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{1}{12(k+2)\alpha^2}$$

en utilisant $E\left(\frac{X_k}{k+2}\right) \underset{\text{lin. de } E}{=} \frac{E(X_k)}{k+2} = \frac{1}{2}$ et $V\left(\frac{X_k}{k+2}\right) = \frac{1}{(k+2)^2}V(X_k) = \frac{1}{12(k+2)}$.

Par thèorème des gendarmes, $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| \geq \alpha\right)$ et vaut 0.

Par passage è l'événement complèmentaire :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| < \alpha\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| \geq \alpha\right) \underset{k\to+\infty}{\to} 1.}$$

b) La variable $\frac{X_k}{k+2}$ converge donc en probabilitè vers $\frac{1}{2}$. Ce n'est pas surprenant, puisque $\frac{X_k}{k+2}$ représente la proportion de boules blanches dans l'urne après k tirages. Intuitivement, cette proportion a tendance à être proche de $\frac{1}{2}$ quand k est grand puisque l'expèrience est totalement symètrique en ce qui concerne les rèles jouès par les boules blanches et les boules noires.

Partie D

14. a) Soient $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\varphi_{i,j}(\alpha P + \beta Q) &= j(\alpha P + \beta Q)(x+1) - i(\alpha P + \beta Q)(x) \\ &= j\alpha P(x+1) + j\beta Q(x+1) - i\alpha P(x) - i\beta Q(x) \\ &= \alpha\left(jP(x+1) - iP(x)\right) + \beta\left(jQ(x+1) - iQ(x)\right) \\ &= \alpha\varphi_{i,j}(P) + \beta\varphi_{i,j}(Q)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi_{i,j} \text{ est une application linèaire.}}$

b) Si P est nul alors $\varphi_{i,j}(P)$ est nul aussi.

Supposons P non nul, de la forme $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ avec $\alpha_n \neq 0$. Alors $P(x+1) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k (x+1)^k$ aura le même terme dominant que $\alpha_n(x+1)^n$ (car les autres termes sont tous de degrés inférieurs stricts à n), è savoir $\alpha_n x^n$.

Par somme, le terme dominant de $\varphi_{i,j}(P) = jP(x+1) - iP(x)$ est donc $(j-i)\alpha_n x^n$ avec $(j-i)\alpha_n \neq 0$.

Donc $\boxed{P \text{ et } \varphi_{i,j}(P) \text{ ont le même degré}}$.

c) D'après la question précédente, si P n'est pas nul, alors $\varphi_{i,j}(P)$ ne l'est pas non plus. Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi_{i,j})$ ne contient que le polynôme nul, et $\boxed{\varphi_{i,j} \text{ est injective.}}$

d) Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Si P est le polynème nul, on peut prendre $Q = 0_{\mathbb{R}[x]}$.

Supposons $\deg(P) = n \geq 0$. D'après la question 14.(b), le sous-espace $\mathbb{R}_n[x]$ de $\mathbb{R}[x]$ est stable par $\varphi_{i,j}$. $\varphi_{i,j}$ y induit un endomorphisme $\widetilde{\varphi_{i,j}}$, injectif puisque $\varphi_{i,j}$ l'est. Puisque $\mathbb{R}_n[x]$ est de dimension finie, $\widetilde{\varphi_{i,j}}$ est ègalement surjective. Par conséquent, le polynème $P \in \mathbb{R}_n[x]$ admet un antècèdent par $\widetilde{\varphi_{i,j}}$: il existe $Q \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $P = \widetilde{\varphi_{i,j}}(Q) = \varphi_{i,j}(Q)$.

On a ainsi montrè que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[x], \quad \exists Q \in \mathbb{R}[x], \quad \varphi_{i,j}(Q) = P.$$

15. a) Par définition, $P_{2,1}(x) = \varphi_{2,1}^{-1}((3 + x - 2)P_{2-1,1}(x)) = \varphi_{2,1}^{-1}(x + 1)$.

Calculons :

$$\varphi_{2,1}(-x - 2) = 1 \times (-(x + 1) - 2) - 2(-x - 2) = x + 1 = \varphi_{2,1}(P_{2,1}(x)).$$

Par injectivitè de $\varphi_{2,1}$, on obtient $\boxed{-x - 2 = P_{2,1}(x).}$

Par dèfinition, $\boxed{P_{2,2} \text{ est le polynème constant ègal è } -P_{2,1}(0) = 2.}$

b) Par dèfinition, $P_{3,2}(x) = \varphi_{3,2}^{-1}((3 + x - 3)P_{3-1,2}(x)) = \varphi_{3,2}^{-1}(2x)$. Or :

$$\varphi_{3,2}(-2x - 4) = 2(-2(x + 1) - 4) - 3(-2x - 4) = -4x - 12 + 6x + 12 = 2x.$$

Par injectivitè de $\varphi_{3,2}$, on obtient $\boxed{P_{3,2}(x) = -2x - 4.}$

16. a) La propriètè $\mathscr{H}_1$ s'écrit : « $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!} P_{1,1}(k)1^k$ ». Et cette propriètè est bien satisfaite puisqu'on sait que $P_{1,1} = 1$ et $\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}$.

b) Soit $i \geq 2$. On suppose $\mathscr{H}_{i-1}$ vraie. Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\alpha_{k+1} &= (k+2)!\,\mathbb{P}(X_{k+1} = i) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1)j^{k+1} \\
&= (k+2)!\left(\tfrac{i}{k+2}\mathbb{P}\left(X_k = i\right) + \tfrac{3+k-i}{k+2}\mathbb{P}\left(X_k = i-1\right)\right) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1)j^{k+1} \text{ avec } (*) \\
&= (k+1)!\left(i\mathbb{P}\left(X_k = i\right) + (3+k-i)\mathbb{P}\left(X_k = i-1\right)\right) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1)j^{k+1} \\
&= (k+1)!\left(i\mathbb{P}\left(X_k = i\right) + (3+k-i)\tfrac{1}{(k+1)!}\sum_{j=1}^{i-1} P_{i-1,j}(k)j^k\right) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1)j^{k+1} \text{ avec } \\
&= (k+1)!\,i\,\mathbb{P}\left(X_k = i\right) + \sum_{j=1}^{i-1}\left(\underbrace{(3+k-i)P_{i-1,j}(k)}_{=\varphi_{i,j}(P_{i,j})(k) \text{ par dèf. de } P_{i,j}}\ j^k - P_{i,j}(k+1)j^{k+1}\right) \\
&= (k+1)!\,i\,\mathbb{P}\left(X_k = i\right) + \sum_{j=1}^{i-1}\left((jP_{i,j}(k+1) - iP(k))j^k - P_{i,j}(k+1)j^{k+1}\right) \\
&= (k+1)!\,i\,\mathbb{P}\left(X_k = i\right) + \sum_{j=1}^{i-1}\left(j^{k+1}P_{i,j}(k+1) - iP_{i,j}(k)j^k - P_{i,j}(k+1)j^{k+1}\right) \\
&= i\left((k+1)!\,\mathbb{P}\left(X_k = i\right) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k)j^k\right) = i\alpha_k.
\end{aligned}$$

Donc (α_k) est une suite géométrique de raison i : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = i^k\alpha_0$.

Or $\alpha_0 = (0+1)!\,\mathbb{P}\left(X_0 = i\right) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0)j^0 = P_{i,i}(x)$ (car $i > 1$ donc $\mathbb{P}\left(X_0 = i\right) = 0$).

Donc $\alpha_k = i^k P_{i,i}(x)$, ce qui se rècrit :

$$(k+1)!\,\mathbb{P}\left(X_k = i\right) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k) j^k = i^k P_{i,i}(k).$$

car $P_{i,i}$ est un polynôme constant. Finalement :

$$(k+1)!\,\mathbb{P}\left(X_k = i\right) = \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k) j^k + i^k P_{i,i}(k) = \sum_{j=1}^{i} P_{i,j}(k) j^k.$$

Ce qui prouve que $\mathscr{H}_i$ est vraie.

c) Le 16.(a) initialise la récurrence, le 16.(b) assure l'hérédité. Par principe de rècurrence, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la propriètè suivante est satisfaite :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\left(X_k = i\right) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^{i} P_{i,j}(k) j^k.}$$

17. a) À la question 7.(c), il est vu que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{2^{k+1}-k-2}{(k+1)!}$.

La question 15.(a) donne $P_{2,1}(x) = -x - 2$. D'où, avec la question 16 :

$$\mathbb{P}\left(X_k = 2\right) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^{2} P_{2,j}(k) j^k = \frac{1}{(k+1)!} \left(P_{2,1}(k) + P_{2,2}(k) 2^k\right) = \frac{1}{(k+1)!} \left(-k - 2 + 2^{k+1}\right.$$

Les résultats sont bien identiques.

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\left(X_k = 3\right) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^{3} P_{3,j}(k) j^k = \frac{1}{(k+1)!} \left(P_{3,1}(k) + P_{3,2}(k) 2^k + P_{3,3}(k) 3^k\right)$$

$$\boxed{= \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1 + (-2k-4)\,2^k + 3^{k+1}\right).}$$