Devoir Surveillé 5 - Version Ecricome

Séries, probabilités discrètes, applications linéaires en dimension finie

La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Rappeler le théorème du rang et sa preuve.
2. Convergence absolue des séries : résultat et preuve.
3. Rappeler les formules d'espérance et de variance pour les lois de Poissons et les lois géométriques, et les démontrer.

Exercice 2 (Edhec - La fin du problème est assez ardue)

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $a_n = \dfrac{1}{n \ln n}$.

   a) Montrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a : $\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k \ln k}$.

   b) En déduire, par sommation, la nature de la série de terme général a_n.

   Dans la suite, on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.

3. a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.

   b) Étudier le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$, lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f.

   c) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis dresser son tableau de variation.

4. a) Établir que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n, tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1.

   b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

   c) Pour tout entier naturel n non nul, calculer $f\left(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ puis en déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a : $u_n \leqslant 1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

   d) En déduire, à l'aide de la première question, que la série de terme général $\dfrac{1}{-n \ln(1-u_n)}$ est divergente.

   e) Conclure, en revenant à la définition de u_n, que la série de terme général $1 - u_n$ est divergente.

Problème : Ecricome

Une urne contient initialement une boule, blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.
On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le $(k+1)$-ème tirage. En particulier, on a $X_0 = 1$. On admet que pour tout entier k, X_k est une variable aléatoire de $(\Omega, \mathscr{T}, P)$.

Partie A

1. Déterminer la loi de X_1. Donner son espérance et sa variance.

2. Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par :
$$P([X_2 = 1]) = \frac{1}{6}, \quad P([X_2 = 2]) = \frac{2}{3}, \quad P([X_2 = 3]) = \frac{1}{6}.$$

3. Préciser l'ensemble $X_k(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X_k.

4. Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$. Déterminer $P_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i])$.
(On distinguera différents cas selon les valeurs relatives de i et j).

5. Déduire de ce qui précède que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad P([X_{k+1} = i]) = \frac{i}{k+2} P([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2} P([X_k = i-1]). \quad (*)$$

6. À l'aide de la formule $(*)$, déterminer la loi de X_3.

7. a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $P([X_k = 1]) = \frac{1}{(k+1)!}$.

   b) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $P([X_k = k+1])$.

   c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $a_k = (k+1)! \times P([X_k = 2])$.
   Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k et de k.
   Montrer que la suite $(b_k)_{k\geq 0}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N},\ b_k = a_k + k + 2$ est géométrique.
   En déduire alors que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P([X_k = 2]) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}.$$

Partie B

8. Que renvoie la fonction `Python` suivante pour un entier k non nul ?
Détailler le fonctionnement de la ligne 5.

```
1  def mystere(k):
2      n = 1
3      b = 1
4      for i in range(k):
5          r = np.floor(rd.random()*(n+b)+1)
6          if r>n :
7              n = n+1
8          else :
9              b = b+1
10     return(b)
```

9. Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def loi_exp(k,N)` qui prend en entrée un entier strictement positif k et un entier N, qui effectue N simulations de k tirages successifs dans l'urne et qui retourne un vecteur `LE` qui contient une estimation de la loi de X_k (c'est-à-dire que pour chaque $i \in [\![1, k+1]\!]$, `LE[i-1]` contient la fréquence d'apparition de l'événement $[X_k = i]$ au cours des N simulations).

   On pourra utiliser la fonction `mystere`.

10. Recopier et complèter la fonction `loi_theo` suivante, qui prend en entrée un entier strictement positif n, afin qu'elle retourne un vecteur `LT` qui contient la loi théorique de X_n.

```
def loi_theo(n):
    M = np.zeros((n+1,n+1))
    M[0,0] = 1
    M[1,0] = 1/2
    M[1,1] = 1/2
    for k in range(1,n):
        M[k+1,0] = .........
        for i in range(1,k+1):
            M[k+1,i] = .........
    M[k+1,k+1] = .........
    LT = .........
    return(LT)
```

11. Un étudiant nous propose comme loi de X_5 le résultat suivant :

k	1	2	3	4	5	6
$P([X_5 = k])$	0.001368	0.079365	0.419434	0.418999	0.079454	0.00138

   A-t-il utilisé `loi_exp` ou bien `loi_theo` ?

Partie C

12. a) À l'aide de la formule $(*)$, montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad E(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2} E(X_k) + 1.$$

   b) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad E(X_k) = \frac{k+2}{2}.$$

   c) Soit Y_k la variable aléatoire égale au nombre de boules noires prèsentes dans l'urne après k tirages.

   Justifier que X_k et Y_k ont même espérance, puis retrouver le résultat de la question précèdente.

   On admettra pour la suite que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad V(X_k) = \frac{k+2}{12}.$$

13. **Non faisable pour l'instant. Nécessite Markov et BT et la notion de convergence en probabilité.**

   a) Soit $\alpha > 0$. Montrer que :

$$\lim_{k \to +\infty} P\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| < \alpha\right) = 1.$$

   b) Interpréter ce résultat et le justifier intuitivement.

Partie D

14. Pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq j < i$, on définit l'application $\varphi_{i,j}$ par :

$$\varphi_{i,j} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ P & \longmapsto & jP(x+1) - iP(x) \end{array} .$$

a) Montrer que $\varphi_{i,j}$ est linéaire.

b) Pour $P \in \mathbb{R}[x]$, montrer que $\deg(\varphi_{i,j}(P)) = \deg(P)$.

c) En déduire que $\varphi_{i,j}$ est injective.

d) Montrer que pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}[x]$, il existe un polynôme Q dans $\mathbb{R}[x]$ tel que $\varphi_{i,j}(Q) = P$.

(Pour P non nul, on pourra s'intéresser à la restriction de $\varphi_{i,j}$ à $\mathbb{R}_n[x]$ où n est le degré de P).

Ce qui précède montrant que $\varphi_{i,j}$ est un automorphisme, on définit le polynôme $P_{i,j}$ pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq j \leq i$, en posant :

$$P_{1,1}(x) = 1, \quad \text{et pour } 1 \leq j < i, \quad P_{i,j}(x) = \varphi_{i,j}^{-1}\left((3 + x - i)P_{i-1,j}(x)\right),$$

et enfin pour tout entier $i > 1$,

$$P_{i,i}(x) = -\sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0).$$

15. a) Vérifier que : $P_{2,1}(x) = -x - 2$, puis calculer $P_{2,2}(x)$.

b) Vérifier que : $P_{3,2}(x) = -2x - 4$.

On admettra dans la suite que : $P_{3,1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$ et $P_{3,3}(x) = 3$.

16. On considère, pour tout entier i de $\mathbb{N}^*$, la propriété suivante :

$$\mathscr{H}_i : \text{« } \forall k \in \mathbb{N},\ P([X_k = i]) = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=1}^{i} P_{i,j}(k)j^k \text{ ».}$$

On souhaite montrer par récurrence que, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, $\mathscr{H}_i$ est vraie.

a) Montrer que $\mathscr{H}_1$ est vraie.

b) Soit $i > 1$. On suppose que $\mathscr{H}_{i-1}$ est vraie et on pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k = (k+1)!P([X_k = i]) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k)j^k.$$

En utilisant la formule $(*)$ et la relation $(3 + x - i)P_{i-1,j}(x) = \varphi_{i,j}(P_{i,j}(x))$, montrer que la suite $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ est géométrique.

Déterminer α_0 et en déduire que $\mathscr{H}_i$ est vraie.

c) Conclure.

17. a) En utilisant le résultat de la question 15.(a), retrouver le résultat de la question 7.(c).

b) Déterminer $P([X_k = 3])$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.