Entrainement CB
Valeurs Propres, Intégration, Probas

La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Exercice 1 Ecricome 2009

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Domaine de définition de f.*

   a) Justifier que pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t$ est convergente et donner sa valeur.

   b) Soit x un réel fixé. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t$.

   Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est clairement paire. On va donc l'étudier sur $[0,+\infty[$.

2. *Étude de f au voisinage de $+\infty$.*

   a) Vérifier l'encadrement suivant, pour tout réel x strictement positif et pour tout réel t positif ou nul :

   $$xe^t \leq \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leq xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}.$$

   b) Prouver que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\quad x \leq f(x) \leq x + \dfrac{1}{6x}$.

   c) Déterminer alors la limite de f en $+\infty$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

3. *Dérivabilité et monotonie de f.*

   a) À l'aide du changement de variable $u = xe^t$ que l'on justifiera, prouver la formule suivante lorsque x est un réel strictement positif :

   $$f(x) = x^2\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\mathrm{d}u.$$

   b) Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée est donnée, pour tout réel x strictement positif, par :

   $$f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

c) Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante :

$$2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

En déduire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

4. *Étude locale de f et f' en 0.*

a) Justifier que la formule suivante est valable pour tout réel x strictement positif :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}u$$

et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}u$ est convergente.

b) À l'aide des questions précédentes, montrer alors que l'on a :

$$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x \ln x \quad \text{et} \quad f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2 \ln x}{2}.$$

Exercice 2 Ecricome 2026 (tronqué)

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le spectre de A.

b) Déterminer une matrice V de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = VDV^{-1}$. On ordonnera les coefficients diagonaux de D dans l'ordre croissant. **On ne demande pas le calcul de V^{-1}.**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$. Pour tout entier naturel k, P_k désigne le polynôme x^k. φ est l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, associe le polynôme $\varphi(P)(x) = \left(x^2-1\right) P''(x) + 5xP'(x)$.

Si λ est une valeur propre de φ, $E_\lambda(\varphi)$ désigne le sous-espace propre de φ associé à la valeur propre λ. Un polynôme sera dit unitaire lorsque son coefficient dominant vaut 1 . Par exemple le polynôme $x^3 - 2x + 4$ est unitaire.

2. a) Calculer $\varphi(P_0), \varphi(P_1), \varphi(P_k)$ pour tout entier naturel k de $[\![2, n]\!]$.

b) Déterminer le degré et le coefficient dominant de $\varphi(P)$ pour tout polynôme unitaire P de degré d où d est inférieur ou égal à n.

3. a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

b) Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

c) Montrer que, pour tout entier k de $[\![0, n]\!]$, $\mathbb{R}_k[x]$ est stable par φ.

d) On considère l'endomorphisme $\Psi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ défini par $\Psi(P)(x) = \left(x^2-1\right) P''(x) + 5xP'(x)$. Écrire la matrice de Ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.

4. a) Justifier que $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{k(k+4), k \in [\![0, n]\!]\}$.

b) Montrer que φ admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes.

Indication : On pourra étudier la fonction $x \mapsto x(x+4)$.

c) Montrer que, pour tout entier naturel k de $[\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme unitaire noté G_k tel que

$$E_{k(k+4)}(\varphi) = \mathrm{Vect}(G_k)$$

d) Que valent G_0 et G_1 ?

e) Vérifier que $G_2(x) = x^2 - \dfrac{1}{6}$.

f) Montrer que, pour tout entier naturel k de $[\![0, n]\!]$, le degré de G_k est k.

5. Soit k un entier naturel de $[\![0, n]\!]$.
Soit P un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $k(k+4)$. Notons Q le polynôme $P(-x)$.

a) Donner l'expression de Q' et de Q'' à l'aide de P' et de P''.

b) Montrer que Q est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $k(k+4)$.

c) En déduire la parité du polynôme G_k en fonction de k.

L'exercice se poursuit ici (environ 2x plus long) mais nécessite des notions de 2ème année (produit scalaire).

Problème 2 EML 2026

Dans tout le problème, on considère que les variables aléatoires sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ qu'on ne cherchera pas à expliciter. Si Y est une variable aléatoire définie sur Ω, on note respectivement (en cas d'existence) $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(Y)$ l'espérance et la variance de Y.

Partie 1 - Des résultats préliminaires

Les quatre questions de cette partie sont indépendantes. On démontre, dans chacune de ces questions, un résultat qui sera utilisé dans la Partie 2. On pourra, si besoin, admettre ces résultats.

1. Soit W une variable aléatoire discrète à valeurs entières. On introduit la fonction G_W, définie sur $[0, 1]$, par

$$\forall t \in [0,1], \quad G_W(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(W = n) t^n$$

a) Justifier que G_W est bien définie sur $[0, 1]$.

b) Montrer que G_W est croissante sur $[0, 1]$.

c) En déduire l'existence d'un réel ℓ tel que $\lim\limits_{t \to 1^-} G_W(t) = \ell$.

d) Montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1[, \quad \sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}(W = n) t^n \leqslant G_W(t) \leqslant G_W(1),$$

puis que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}(W = n) \leqslant \ell \leqslant G_W(1).$$

e) En déduire que G_W est continue en 1.

f) Justifier que, pour tout $t \in [0, 1[$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n\mathbb{P}(W = n) t^{n-1}$ est convergente.

On admet que G_W est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et que, pour tout $t \in [0,1[$:

$$G'_W(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(W=n)t^{n-1}$$

2. Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants.

   a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1-x \leqslant \exp(-x)$.

   b) Montrer que, pour tous entiers m, n vérifiant $1 \leqslant n \leqslant m$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) \geqslant 1 - \exp\left(-\sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}\left(A_k\right)\right).$$

   c) On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}\left(A_n\right)$ diverge.

   Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) = 1.$$

On vient de montrer que dans le cas où la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}\left(A_n\right)$ diverge, alors la probabilité qu'une infinité de ces évènements se réalisent simultanément est égale à 1.

3. Soit $(W_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes de même loi. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on introduit les vecteurs aléatoires U_n et $V_{n,k}$ définis par

$$U_n = \left(W_1, W_1+W_2, \ldots, \sum_{i=1}^{n} W_i\right), \quad \text{et} \quad V_{n,k} = \left(W_k, W_k+W_{k+1}, \ldots, \sum_{i=k}^{n-1+k} W_i\right)$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall\, (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{P}\left(U_n = (j_1, j_2, \ldots, j_n)\right) = \mathbb{P}\left(V_{n,k} = (j_1, j_2, \ldots, j_n)\right)$$

On admet qu'on vient de montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*, U_n$ et $V_{n,k}$ sont des vecteurs aléatoires de même loi.

4. On considère deux séries convergentes, à termes positifs, $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$.

   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} c_k \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) \leqslant \sum_{k=1}^{2n} c_k$.

   b) En déduire la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1} c_k$ et qu'on a de plus : $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right)$.

Partie 2 - Une marche aléatoire

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi, telles que, pour tout $n \geqslant 1, X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$ et

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$$

On introduit alors $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est appelée *marche aléatoire* ; pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n$ prend pour valeur la position (sur un axe gradué) d'un marcheur après n déplacements aléatoires vers la gauche ou vers la droite en partant de l'origine.

5. a) Déterminer, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{V}(X_n)$.
   b) En déduire, pour tout $n \geqslant 1$, les valeurs de $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.
6. Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine dont on précisera la valeur.
7. Simulations sous Python.
   a) Écrire une fonction d'en-tête def simul_X() : qui renvoie une simulation de X_1.
   b) En déduire l'écriture d'une fonction d'en-tête def simul_S(n) : qui prend un argument n entier et renvoie une simulation de S_n.
8. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $S_n = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k + 1}{2} - n$.

   Quelle est la loi suivie, pour $k \in \mathbb{N}^*$, par la variable aléatoire $\frac{X_k + 1}{2}$?
9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![-n, n]\!]$.
   a) Justifier que, si i et n n'ont pas la même parité, alors $\mathbb{P}(S_n = i) = 0$.
   b) Montrer que, si i a la même parité que n, alors $\mathbb{P}(S_n = i) = \binom{n}{\frac{n+i}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
10. On admet la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.
    a) Montrer que $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.
    b) Conclure, à l'aide de la Question **2.c.**, que, presque sûrement, la marche aléatoire passe une infinité de fois par 0 .

    On note T la variable aléatoire qui vaut -1 si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[S_n \leqslant 0]$ est réalisé, ou sinon, qui prend la valeur du plus petit entier $n \geqslant 1$ pour lequel $[S_n > 0]$ est réalisé. En particulier, $\mathbb{P}(T = 0) = 0$.
11. a) Calculer $\mathbb{P}(T = 1)$.
    b) Soit $n \geqslant 2$. Expliquer de manière succincte l'égalité : $[T = n] = \left(\bigcap_{j=1}^{n-1} [S_j \leqslant 0]\right) \cap [S_n = 1]$.
    c) Montrer que, pour tout entier naturel n pair, $\mathbb{P}(T = n) = 0$.
12. On introduit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement

$$R_k = [S_1 = -1] \cap \left(\bigcap_{j=2}^{k} [S_j \leqslant -1]\right) \cap [S_{k+1} = 0]$$

a) Expliquer par une phrase claire et rigoureuse ce que signifie la réalisation de l'évènement R_k.

b) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(R_k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(T = k)$$

On pourra utiliser le résultat de la Question 3.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(T = n+1) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(R_k \cap \left(\bigcap_{j=k+2}^{n} [S_j - S_{k+1} \leqslant 0]\right) \cap [S_{n+1} - S_{k+1} = 1]\right)$$

d) Obtenir alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(T = n+1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(T = k)\mathbb{P}(T = n-k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T = k)\mathbb{P}(T = n-k)$$

13. a) Montrer, à l'aide de la question précédente et de la Question 4.b. que, pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$G_T(t)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T = k)\mathbb{P}(T = n-k)\right) t^n$$

où G_T désigne la fonction associée à T comme dans la Question 1. de la Partie 1.

b) Montrer alors que, pour tout $t \in [0, 1]$: $t\,G_T(t)^2 = 2G_T(t) - t$.

c) En déduire que $G_T(1) = 1$ puis que $\mathbb{P}(T = -1) = 0$.
On vient de montrer que, presque sûrement, il existe un entier n tel que $[S_n = 1]$ est réalisé.

d) Montrer que : $\lim_{t \to 1} G_T'(t) = +\infty$.

14. Simulations sous `Python`.

a) Écrire une fonction d'en-tête `def simul_T():` qui renvoie une simulation de T.

b) On ajoute les commandes ci-dessous dont l'exécution permet l'affichage ci-contre. Que peut-on conjecturer à propos de T ? (*On commencera par préciser ce que fait la fonction* `mystere`.)

```
def mystere(N):
    ech=np.zeros(N)
    for k in range(N):
        ech[k]=simul_T()
    return np.mean(ech)
for k in range(7):
    print(mystere(1000))
```

Affichage Python

```
>>>
67.88
1246.38
285.62
8181.62
31.36
4394.42
117.58
```

c) Émettre une conjecture sur le lien entre l'existence éventuelle de l'espérance de T et les propriétés de la fonction G_T.