CB épreuve 1
Analyse et Probas

La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Exercice 1 - EDHEC appli

P désignant un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ tel que $P = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, on rappelle que, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $P(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_m A^m$, où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On admet que, si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$ et si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors : $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$.

On se propose de déterminer explicitement le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et la relation, valable pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$.

Pour ce faire, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. a) Écrire la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, indépendante de n, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
   b) Vérifier que $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0$.
2. On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[x]$ défini par $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.
   a) Justifier l'existence et l'unicité d'un couple (Q_n, R_n) de $\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}_2[x]$, tel que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X^n = PQ_n + R_n$$
   b) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n, b_n et c_n que l'on calculera tels que :
   $$R_n(X) = a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2.$$
3. a) Utiliser la question précédente pour écrire, pour tout n de $\mathbb{N}$, A^n comme combinaison linéaire de I, $A - I$ et $(A - I)^2$.
   b) Pour tout n de $\mathbb{N}$ donner la troisième ligne de la matrice A^n.
4. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

Exercice 2 - EMLYON 2013

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geqslant 2$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à une colonne et n lignes, nommées « matrices colonnes » dans la suite du problème.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A.

Si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors ${}^tV$ désigne la matrice transposée de V.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, alors le coefficient de la ligne numéro i et de la colonne numéro j de A est noté $a_{i,j}$, la matrice A est notée $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Si $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la matrice colonne V est notée $V = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, on note $C_j(A)$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée des coefficients de la colonne numéro j de A. Ainsi : $C_j(A) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Partie I : Un exemple

Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0 {}^tV_0$.

1. Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base du sous-espace propre associé.
2. a) Calculer A_0U_0.
   b) Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

Partie II : Trace d'une matrice carrée

Pour toute matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A et on note $\mathrm{Tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A, c'est à dire $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

3. Montrer que l'application $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \longmapsto \mathrm{Tr}(A)$, est linéaire.
4. Montrer : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
5. Vérifier : $\forall A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2$.

Partie III : Une caractérisation des matrices de rang 1

6. Soient $U = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $V = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   a) Justifier : $U{}^tV \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les coefficients de $U{}^tV$ à l'aide des coefficients de U et de V.
   b) Exprimer $\mathrm{Tr}(U{}^tV)$ à l'aide des coefficients de U et de V.
   c) Quel est le rang de $U{}^tV$?
7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
   a) Montrer qu'il existe $j_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que, pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ vérifiant : $C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$.
   b) En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U{}^tV$.
8. Énoncer une caractérisation des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

Partie IV : Une application en probabilités

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

On suppose de plus : $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1; n]\!]$.

On note, pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, $m_{i,j} = \mathrm{P}((X = i) \cap (Y = j))$, puis

$$M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad U_X = (\mathrm{P}(X = i))_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } U_Y = (\mathrm{P}(Y = i))_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

9. On suppose, dans cette question, que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Calculer $U_X {}^t U_Y$. En déduire que la matrice M est de rang 1.

10. On suppose, dans cette question, que la matrice M est de rang 1.
    a) Montrer : $C_1(M) + \cdots + C_n(M) = U_X$.
    b) En déduire que, pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, il existe $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j(M) = \beta_j U_X$.
    c) Montrer : $\forall j \in [\![1; n]\!]$, $\mathrm{P}(Y = j) = \beta_j$.
    d) En déduire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Problème - Ecricome 2012 modifié

Les deux premières parties sont indépendantes et la troisième utilise certains résultats obtenus dans les deux premières parties.

La partie I est consacrée à l'étude de deux endomorphismes sur $\mathbb{R}_n[x]$.

La partie II consiste à calculer l'espérance et la variance de Z_k ainsi qu'à calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$ sous réserve de convergence.

La partie III fournira la loi de Z_k ainsi que l'étude de la convergence de la série $\sum_{k\geq 0} P(Z_k = r)$.

Partie I : Étude de deux endomorphismes.

Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes à cœfficients réels de degré au plus n.
Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on désigne par e_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par : $e_k = x^k$.
Rappelons que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
Si $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on définit les fonctions $f(P)$ et $g(P)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(P)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad f(P)(1) = P(1),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(P)(x) = (x-1)P'(x) + P(x).$$

1. Prouver que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Calculer $f(g(P))$ puis justifier que $\mathrm{Ker}(g) = \{0\}$.
3. Démontrer que g est un isomorphisme, que $g^{-1} = f$ et que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
4. Écrire la matrice A de f dans la base $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ ainsi que la matrice B de g dans cette même base.
5. Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ on désigne par u_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par : $u_k = (x-1)^k$.

   Prouver que $\mathscr{C} = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
6. Calculer $f(u_r)$ pour $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$. En déduire la matrice A' de f dans la base $\mathscr{C} = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$, ainsi que la matrice B' de g dans cette même base.
7. Justifier que : $\forall s \in \{0, 1, \ldots, n\},\ e_s = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} u_r$

   et que : $\forall r \in \{0, 1, \ldots, n\},\ u_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j.$
8. Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$, puis la matrice de passage Q de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$.
9. Déterminer $(A')^k$, puis calculer $A^k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k(e_n) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k} \right) e_j.$$

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose de $n+1$ urnes notées $U_0, U_1, \ldots, U_n$ et on suppose que pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, l'urne U_i contient $i+1$ boules numérotées $0, 1, \ldots, i$.

On s'intéresse au jeu suivant :

— Au premier tirage, on pioche une boule dans l'urne U_n. Si la boule porte le numéro r alors on repose la boule dans l'urne U_n puis le tirage suivant s'effectue dans l'urne U_r.

— Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, si la boule numéro s a été piochée au k-ième tirage dans une certaine urne, on repose cette boule dans la même urne puis on effectue le $(k+1)$-ième tirage dans l'urne U_s.

Pour tout entier naturel k, on note :

— Z_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule piochée au k-ième tirage.
On convient que $Z_0 = n$.

— F_k le polynéme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)x^r$.

— $E(Z_k)$ l'espérance de la variable aléatoire Z_k.

10. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $Z_k(\Omega)$.
Que dire de la loi de Z_1 ? En déduire l'expression de F_1.

11. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad P(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1}.$$

12. Établir les formules suivantes valables pour tous entiers $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$:

$$(\mathcal{R}_1) : \quad (n+1)P(Z_{k+1} = n) = P(Z_k = n)$$
$$(\mathcal{R}_2) : \quad (r+1)P(Z_{k+1} = r) - (r+1)P(Z_{k+1} = r+1) = P(Z_k = r).$$

13. On admet dans cette question que la série $\sum_{k\geq 0} P(Z_k = r)$ converge pour tout $r \in \{1, \ldots, n\}$ et on pose $S_r = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$.
En sommant les relations $(\mathcal{R}_1)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_n.
En sommant les relations $(\mathcal{R}_2)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_{n-1} et montrer que la suite $(rS_r)_{1\leq r\leq n-1}$ est constante.

14. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer la relation :

$$(\mathcal{S}) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$

15. a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Établir que $F'_k(1) = E(Z_k)$ et $F''_k(1) = E(Z_k(Z_k - 1))$.
b) En dérivant une fois puis deux fois la relation $(\mathcal{S})$, donner la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F'_k(1))_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi que la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F''_k(1))_{k\in\mathbb{N}}$.
c) Donner la valeur de $F'_k(1)$ et de $F''_k(1)$ en fonction de k et n.
Expliciter alors la variance $V(Z_k)$ de Z_k en fonction de k et n.

Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires.

On reprend toutes les notations des parties I et II et on pourra admettre tous les résultats établis dans ces deux parties.

Rappelons également qu'à la question II.4 la relation $(\mathcal{S})$ est démontrée ce qui revient à écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g(F_{k+1}) = F_k, \qquad \text{soit encore} \qquad f(F_k) = F_{k+1}.$$

16. Montrer que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}, \ \sum_{j=0}^{n} P(Z_k = j) e_j = F_k = f^k(e_n).$

17. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. À l'aide des résultats obtenus à la partie I, établir que :

$$P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

18. **Application.**

a) Soit $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Déterminer un réel $M_{j,n}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ |P(Z_k = j)| \leq \frac{M_{j,n}}{(j+1)^k}$$

puis justifier que la série $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = j)$ converge lorsque $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

b) Déterminer un réel C_n tel que : $\forall k \in \mathbb{N}, \ |P(Z_k = 0) - 1| \leq \frac{C_n}{2^k}$.

La série $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = 0)$ est-elle convergente ?