La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Exercice 1 - EDHEC appli

P désignant un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ tel que $P = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, on rappelle que, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $P(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_m A^m$, où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On admet que, si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$ et si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors : $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$.

On se propose de déterminer explicitement le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et la relation, valable pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$.

Pour ce faire, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. a) Écrire la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, indépendante de n, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

b) Vérifier que $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0$.

Calculons successivement les puissances de A.

On a déjà $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculons A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-5 & -20+2 & 8 \\ 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -18 & 8 \\ 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculons A^3 :

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & -18 & 8 \\ 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 44-20+2 & -72+25 & 32-10 \\ 11 & -18 & 8 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -47 & 22 \\ 11 & -18 & 8 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifions maintenant que $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0$:

$$\begin{aligned} & A^3 - 4A^2 + 5A - 2I \\ &= \begin{pmatrix} 26 & -47 & 22 \\ 11 & -18 & 8 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 11 & -18 & 8 \\ 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 26-44+20-2 & -47+72-25 & 22-32+10 \\ 11-16+5 & -18+20-2 & 8-8 \\ 4-4 & -5+5 & 2+0-2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0}$.

2. On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[x]$ défini par $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

a) Justifier l'existence et l'unicité d'un couple (Q_n, R_n) de $\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}_2[x]$, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X^n = PQ_n + R_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la division euclidienne de X^n par P dans $\mathbb{R}[x]$.
Le polynôme P est non nul (son coefficient dominant vaut 1), donc d'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$X^n = PQ_n + R_n \quad \text{et} \quad \deg(R_n) < \deg(P).$$

Or $\deg(P) = 3$, donc $\deg(R_n) < 3$, ce qui signifie que $\boxed{R_n \in \mathbb{R}_2[x]}$.
L'existence et l'unicité du couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}_2[x]$ sont donc garanties par le théorème de la division euclidienne.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n, b_n et c_n que l'on calculera tels que :

$$R_n(X) = a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a $X^n = PQ_n + R_n$ avec $R_n \in \mathbb{R}_2[x]$.
Comme 1, $x-1$ et $(x-1)^2$ sont de degrés distincts, ils forment une famille libre de $\mathbb{R}_2[x]$ donc une base car $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$. On a donc l'existance d'un unique triplet de réels (a_n, b_n, c_n) tel que :

$$\boxed{R_n(X) = a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2.}$$

De plus, $P(1) = 1 - 4 + 5 - 2 = 0$, donc 1 est racine de P. On a même $P'(x) = 3x^2 - 8x + 5$, donc $P'(1) = 3 - 8 + 5 = 0$. Ainsi, 1 est racine double de P.
De même, $P(2) = 8 - 16 + 10 - 2 = 0$, donc 2 est racine de P.
On peut donc écrire : $\boxed{P(x) = (x-1)^2(x-2).}$
Puisque $X^n = PQ_n + R_n$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = P(x)Q_n(x) + R_n(x).$$

avec $R_n(x) = a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2$.
Équation 1 : En évaluant $X^n = PQ_n + R_n$ en $x = 1$:

$$1 = P(1)Q_n(1) + R_n(1) = 0 + a_n.$$

Donc $a_n = 1$.
Équation 2 : En dérivant $X^n = PQ_n + R_n$, on obtient $nX^{n-1} = P'Q_n + PQ'_n + R'_n$.
En évaluant en $x = 1$ (sachant que $P(1) = P'(1) = 0$) :

$$n = 0 + 0 + R'_n(1).$$

Or $R'_n(x) = b_n + 2c_n(x-1)$, donc $R'_n(1) = b_n$.
D'où $b_n = n$.
Équation 3 : En évaluant $X^n = PQ_n + R_n$ en $x = 2$:

$$2^n = P(2)Q_n(2) + R_n(2) = 0 + R_n(2).$$

Or $R_n(2) = a_n + b_n(2-1) + c_n(2-1)^2 = a_n + b_n + c_n = 1 + n + c_n$.
Donc :

$$2^n = 1 + n + c_n \quad \Leftrightarrow \quad c_n = 2^n - n - 1.$$

Ainsi : $\boxed{a_n = 1}$, $\boxed{b_n = n}$ et $\boxed{c_n = 2^n - n - 1}$.
Ainsi : $\boxed{R_n(x) = 1 + n(x-1) + (2^n - n - 1)(x-1)^2}$.

3. a) Utiliser la question précédente pour écrire, pour tout n de $\mathbb{N}$, A^n comme combinaison linéaire de I, $A - I$ et $(A - I)^2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1.b), on a $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0$, ce qui s'écrit :

$$P(A) = 0 \quad \text{où} \quad P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2.$$

D'après la question 2.a), on a $X^n = PQ_n + R_n$, donc en appliquant cette relation à la matrice A :

$$A^n = P(A)Q_n(A) + R_n(A) = 0 \cdot Q_n(A) + R_n(A) = R_n(A).$$

D'après la question 2.b), on a :

$$R_n(x) = 1 + n(x-1) + (2^n - n - 1)(x-1)^2.$$

Donc :

$$\begin{aligned} A^n = R_n(A) &= 1 \cdot I + n(A-I) + (2^n - n - 1)(A-I)^2 \\ &= \boxed{I + n(A-I) + (2^n - n - 1)(A-I)^2.} \end{aligned}$$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$ donner la troisième ligne de la matrice A^n.

Calculons d'abord $A - I$ et $(A-I)^2$.
On a :

$$A - I = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculons $(A-I)^2$:

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la question précédente :

$$A^n = I + n(A-I) + (2^n - n - 1)(A-I)^2.$$

La troisième ligne de I est $(0, 0, 1)$. La troisième ligne de $A - I$ est $(0, 1, -1)$.
La troisième ligne de $(A-I)^2$ est $(1, -2, 1)$.
Donc la troisième ligne de A^n est :

$$(0, 0, 1) + n(0, 1, -1) + (2^n - n - 1)(1, -2, 1).$$

Soit :

$$\boxed{(2^n - n - 1,\ n - 2(2^n - n - 1),\ 1 - n + 2^n - n - 1)}$$

ou encore

$$\boxed{(2^n - n - 1,\ 3n + 2 - 2 \cdot 2^n,\ 2^n - 2n)\,.}$$

4. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Montrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

Initialisation. Pour $n = 0$, on a $X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A^0 X_0 = I X_0 = X_0$.
Donc la propriété est vraie au rang 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $X_n = A^n X_0$. Montrons que $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$.
D'après la question 1.a), on a $X_{n+1} = A X_n$.
Donc :

$$X_{n+1} = A X_n = A(A^n X_0) = A^{n+1} X_0.$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion. Par récurrence, on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$.

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc u_n est le coefficient de la troisième ligne de $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'après la question 3.b), la troisième ligne de A^n est $(2^n - n - 1,\ 3n + 2 - 2 \cdot 2^n,\ 2^n - 2n)$.

Donc :

$$\begin{aligned} u_n &= (2^n - n - 1) \times 1 + (3n + 2 - 2 \cdot 2^n) \times 1 + (2^n - 2n) \times 0 \\ &= 2^n - n - 1 + 3n + 2 - 2 \cdot 2^n \\ &= 2^n - 2 \cdot 2^n - n + 3n - 1 + 2 \\ &= -2^n + 2n + 1 \\ &= \boxed{2n + 1 - 2^n.} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2n + 1 - 2^n.}$

Exercice 2 - EMLYON 2013

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geqslant 2$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à une colonne et n lignes, nommées « matrices colonnes » dans la suite du problème.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A.

Si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors ${}^tV$ désigne la matrice transposée de V.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, alors le coefficient de la ligne numéro i et de la colonne numéro j de A est noté $a_{i,j}$, la matrice A est notée $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Si $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la matrice colonne V est notée $V = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, on note $C_j(A)$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée des coefficients de la colonne numéro j de A. Ainsi : $C_j(A) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Partie I : Un exemple

Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0 {}^tV_0$.

1. Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base du sous-espace propre associé.

Calculons d'abord $A_0 = U_0 {}^tV_0$:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

On observe que toutes les colonnes de A_0 sont proportionnelles à la première colonne U_0. Donc $\mathrm{rg}(A_0) = 1$, et par le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme canoniquement associé à A_0 dans $\mathbb{R}^4$:

$$\dim(\mathrm{Ker}(A_0)) = 4 - \mathrm{rg}(A_0) = 4 - 1 = 3.$$

Donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } A_0}$ et le sous-espace propre associé est de dimension 3.

Pour déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A_0)$, résolvons $A_0 X = 0$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

Cela revient à résoudre :

$$\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 2x - 2y + 4z - 2t = 0 \\ 3x - 3y + 6z - 3t = 0 \\ 4x - 4y + 8z - 4t = 0 \end{cases}$$

Les quatre équations sont proportionnelles, donc le système se réduit à :

$$x - y + 2z - t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y - 2z + t.$$

Les variables y, z et t sont libres. En prenant successivement $(y,z,t) = (1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$, on obtient trois vecteurs libres de $\mathrm{Ker}(A_0)$:

$$\boxed{\mathrm{Ker}\ (A_0) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right).}$$

2. a) Calculer A_0U_0.

Calculons $A_0U_0 = (U_0{}^tV_0)U_0$.
Par associativité du produit matriciel :

$$A_0U_0 = U_0({}^tV_0U_0).$$

Or ${}^tV_0U_0$ est le produit d'une matrice ligne par une matrice colonne, c'est-à-dire un scalaire :

$${}^tV_0U_0 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = 1-2+6-4 = 1.$$

Donc :

$$\boxed{A_0U_0 = 1\cdot U_0 = U_0 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}.}$$

b) Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

D'après la question précédente, $A_0U_0 = U_0$, donc U_0 est vecteur propre de A_0 associé à la valeur propre 1.
D'après la question 1, on connaît trois vecteurs propres associés à la valeur propre 0 :

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

La famille (U_0, e_1, e_2, e_3) est constituée de 4 vecteurs propres associés à des valeurs propres (0 et 1). Il suffit de vérifier que cette famille est libre pour conclure que A_0 est diagonalisable.
Or des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre. Donc (U_0, e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^4$ constituée de vecteurs propres.
Ainsi, A_0 est diagonalisable et on peut prendre :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\\2 & 1 & 0 & 0\\3 & 0 & 1 & 0\\4 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.}$$

Partie II : Trace d'une matrice carrée

Pour toute matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A et on note $\mathrm{Tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A, c'est à dire $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

3. Montrer que l'application $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \longmapsto \mathrm{Tr}(A)$, est linéaire.

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a :

$$\mathrm{Tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{i,i} + b_{i,i}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B).$$

Et :

$$\mathrm{Tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{i,i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \lambda \mathrm{Tr}(A).$$

Donc $\boxed{\text{Tr est une application linéaire}}$.

4. Montrer : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Le coefficient diagonal d'indice i de AB est :

$$(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}.$$

Donc :

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}.$$

De même, le coefficient diagonal d'indice k de BA est :

$$(BA)_{k,k} = \sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k}.$$

Donc :

$$\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{k=1}^{n} (BA)_{k,k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}.$$

En échangeant les indices i et k dans la double somme(ce qu'on peut faire car la somme est finie, on verra l'an prochain comment faire quand c'est infini), on obtient :

$$\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = Tr(AB)$$

Donc $\boxed{\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)}$.

5. Vérifier : $\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2$.

> Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
> La matrice ${}^tA$ a pour coefficients : $({}^tA)_{i,j} = a_{j,i}$.
> Le coefficient diagonal d'indice i de ${}^tAA$ est :
>
> $$({}^tAA)_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} ({}^tA)_{i,j}(A)_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}a_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2.$$
>
> Donc :
>
> $$\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tAA)_{i,i} = \boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2}.$$

Partie III : Une caractérisation des matrices de rang 1

6. Soient $U = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $V = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   a) Justifier : $U{}^tV \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les coefficients de $U{}^tV$ à l'aide des coefficients de U et de V.

> La matrice U est de taille $n \times 1$ et la matrice ${}^tV$ est de taille $1 \times n$.
> Donc le produit $U{}^tV$ est de taille $n \times n$, d'où $\boxed{U{}^tV \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$
> Le coefficient de la ligne i et de la colonne j de $U{}^tV$ est :
>
> $$(U{}^tV)_{i,j} = u_i \cdot v_j = \boxed{u_iv_j.}$$

   b) Exprimer $\mathrm{Tr}(U{}^tV)$ à l'aide des coefficients de U et de V.

> D'après la question précédente, $(U{}^tV)_{i,i} = u_iv_i$.
> Donc :
>
> $$\mathrm{Tr}(U{}^tV) = \sum_{i=1}^{n} (U{}^tV)_{i,i} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} u_iv_i}.$$

   c) Quel est le rang de $U{}^tV$?

> Toutes les colonnes de $U{}^tV$ sont de la forme :
>
> $$C_j(U{}^tV) = \begin{pmatrix} u_1v_j \\ u_2v_j \\ \vdots \\ u_nv_j \end{pmatrix} = v_j \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = v_jU.$$
>
> Donc toutes les colonnes de $U{}^tV$ sont proportionnelles à U.
> Comme $U \neq 0$, au moins une des colonnes est non nulle (par exemple, si $u_k \neq 0$ et $v_\ell \neq 0$, alors $C_\ell(U{}^tV) = v_\ell U \neq 0$).

Donc $\boxed{\text{rg}(U^tV) = 1}$.

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
   a) Montrer qu'il existe $j_0 \in [\![1; n]\!]$ tel que, pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ vérifiant : $C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
Le rang de A étant 1, l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A est de dimension 1.
Donc il existe une colonne non nulle de A, disons $C_{j_0}(A)$ avec $j_0 \in [\![1; n]\!]$, qui engendre l'espace des colonnes.
Ainsi, pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, la colonne $C_j(A)$ appartient à $\text{Vect}(C_{j_0}(A))$.
Donc $\boxed{\exists \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)}$.

   b) En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U^tV$.

D'après la question précédente, il existe $j_0 \in [\![1; n]\!]$ tel que pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, $C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$.
Posons $U = C_{j_0}(A)$ et $V = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.
Alors $U \neq 0$ (car $C_{j_0}(A)$ est non nulle par construction), et $V \neq 0$ (car $\alpha_{j_0} = 1$ puisque $C_{j_0}(A) = \alpha_{j_0} C_{j_0}(A)$).
De plus, pour tout $j \in [\![1; n]\!]$:

$$C_j(U^tV) = v_j U = \alpha_j C_{j_0}(A) = C_j(A).$$

Donc toutes les colonnes de U^tV coïncident avec celles de A, d'où $\boxed{A = U^tV}$.

8. Énoncer une caractérisation des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

D'après les questions 6.c) et 7, on obtient :
$\boxed{\text{Une matrice } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est de rang 1 si et seulement si il existe deux matrices colonnes}}$
$\boxed{\text{non nulles } U \text{ et } V \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ telles que } A = U^tV.}$

Partie IV : Une application en probabilités

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \text{P})$.
On suppose de plus : $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1; n]\!]$.
On note, pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, $m_{i,j} = \text{P}((X = i) \cap (Y = j))$, puis

$$M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad U_X = (\text{P}(X = i))_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } U_Y = (\text{P}(Y = i))_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

9. On suppose, dans cette question, que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Calculer ${U_X}^t U_Y$. En déduire que la matrice M est de rang 1.

Pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, le coefficient de la ligne i et de la colonne j de ${U_X}^t U_Y$ est :

$$({U_X}^t U_Y)_{i,j} = \mathrm{P}(X=i) \cdot \mathrm{P}(Y=j).$$

Or X et Y sont indépendantes, donc :

$$\mathrm{P}((X=i) \cap (Y=j)) = \mathrm{P}(X=i) \cdot \mathrm{P}(Y=j).$$

D'où :

$$m_{i,j} = \mathrm{P}(X=i) \cdot \mathrm{P}(Y=j) = ({U_X}^t U_Y)_{i,j}.$$

Donc $\boxed{M = {U_X}^t U_Y}$.
Or U_X et U_Y sont deux matrices colonnes non nulles (car $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$, donc toutes les probabilités sont strictement positives).
D'après la question 6.c), on en déduit que $\boxed{\mathrm{rg}(M) = 1}$.

10. On suppose, dans cette question, que la matrice M est de rang 1.
    a) Montrer : $C_1(M) + \cdots + C_n(M) = U_X$.

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, le coefficient de la ligne i de $C_1(M) + \cdots + C_n(M)$ est :

$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}((X=i) \cap (Y=j)).$$

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Y=j)$ pour $j \in [\![1;n]\!]$, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}((X=i) \cap (Y=j)) = \mathrm{P}(X=i).$$

Or le coefficient de la ligne i de U_X est $\mathrm{P}(X=i)$.
Donc $\boxed{C_1(M) + \cdots + C_n(M) = U_X}$.

    b) En déduire que, pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, il existe $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j(M) = \beta_j U_X$.

D'après l'hypothèse, M est de rang 1. D'après la question 7, il existe deux matrices colonnes non nulles U et V telles que $M = U^t V$.
D'après la question précédente, on a :

$$C_1(M) + \cdots + C_n(M) = U_X.$$

Or $C_j(M) = v_j U$ pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, donc :

$$\sum_{j=1}^{n} v_j U = U_X.$$

Soit :

$$\left(\sum_{j=1}^{n} v_j\right) U = U_X.$$

Donc U et U_X sont proportionnels. Comme $U \neq 0$ et $U_X \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $U_X = \lambda U$.
Ainsi, pour tout $j \in [\![1; n]\!]$:

$$C_j(M) = v_j U = \frac{v_j}{\lambda} U_X.$$

En posant $\beta_j = \dfrac{v_j}{\lambda}$, on obtient : $\boxed{C_j(M) = \beta_j U_X}$.

c) Montrer : $\forall j \in [\![1; n]\!]$, $\mathrm{P}(Y = j) = \beta_j$.

Pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, on a :

$$C_j(M) = \begin{pmatrix} m_{1,j} \\ m_{2,j} \\ \vdots \\ m_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}((X = 1) \cap (Y = j)) \\ \mathrm{P}((X = 2) \cap (Y = j)) \\ \vdots \\ \mathrm{P}((X = n) \cap (Y = j)) \end{pmatrix}.$$

En sommant les coefficients de $C_j(M)$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \mathrm{P}(Y = j)$$

(formule des probabilités totales).
D'autre part, d'après la question précédente, $C_j(M) = \beta_j U_X$, donc :

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \beta_j \mathrm{P}(X = i) = \beta_j \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X = i) = \beta_j \cdot 1 = \beta_j.$$

Donc $\boxed{\mathrm{P}(Y = j) = \beta_j}$.

d) En déduire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, le coefficient de la ligne i et de la colonne j de M est :

$$m_{i,j} = \mathrm{P}((X = i) \cap (Y = j)).$$

D'après la question 10.b), on a $C_j(M) = \beta_j U_X$, donc :

$$m_{i,j} = \beta_j \mathrm{P}(X = i).$$

D'après la question 10.c), on a $\beta_j = \mathrm{P}(Y = j)$, donc :

$$m_{i,j} = \mathrm{P}(Y = j) \cdot \mathrm{P}(X = i).$$

Soit :

$$\mathrm{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \mathrm{P}(X = i) \cdot \mathrm{P}(Y = j).$$

Cette égalité étant vraie pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, on en déduit que $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}}$.

Problème - Ecricome 2012 modifié

Les deux premières parties sont indépendantes et la troisième utilise certains résultats obtenus dans les deux premières parties.

La partie I est consacrée à l'étude de deux endomorphismes sur $\mathbb{R}_n[x]$.

La partie II consiste à calculer l'espérance et la variance de Z_k ainsi qu'à calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$ sous réserve de convergence.

La partie III fournira la loi de Z_k ainsi que l'étude de la convergence de la série $\sum_{k\geq 0} P(Z_k = r)$.

Partie I : Étude de deux endomorphismes.

Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes à cœfficients réels de degré au plus n.
Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on désigne par e_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par : $e_k = x^k$.
Rappelons que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
Si $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on définit les fonctions $f(P)$ et $g(P)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(P)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad f(P)(1) = P(1),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(P)(x) = (x-1)P'(x) + P(x).$$

1. Prouver que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(P)(x) = (x-1)P'(x) + P(x).$$

Comme $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on a $\deg(P) \leqslant n$, donc $\deg(P') \leqslant n-1$.
D'où $\deg((x-1)P') \leqslant n$ et $\deg(P) \leqslant n$, donc $\deg(g(P)) \leqslant n$.
Ainsi, $g(P) \in \mathbb{R}_n[x]$, ce qui prouve que $g : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$.
Montrons que g est linéaire. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(P+Q)(x) &= (x-1)(P+Q)'(x) + (P+Q)(x) \\ &= (x-1)(P'(x)+Q'(x)) + P(x) + Q(x) \\ &= (x-1)P'(x) + P(x) + (x-1)Q'(x) + Q(x) \\ &= g(P)(x) + g(Q)(x). \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} g(\lambda P)(x) &= (x-1)(\lambda P)'(x) + (\lambda P)(x) \\ &= (x-1)\lambda P'(x) + \lambda P(x) \\ &= \lambda((x-1)P'(x) + P(x)) \\ &= \lambda g(P)(x). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{g \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[x]}$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Calculer $f(g(P))$ puis justifier que $\mathrm{Ker}(g) = \{0\}$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(P)(x) = (x-1)P'(x) + P(x).$$

Calculons $f(g(P))$ pour $x \neq 1$:

$$\begin{aligned} f(g(P))(x) &= \frac{1}{x-1}\int_1^x g(P)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x-1}\int_1^x [(t-1)P'(t) + P(t)]\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x-1}\left[\int_1^x (t-1)P'(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t\right]. \end{aligned}$$

Pour la première intégrale, effectuons une intégration par parties avec $u : t \mapsto t-1$ et $v : t \mapsto P(t)$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$\int_1^x (t-1)P'(t)\,\mathrm{d}t = [(t-1)P(t)]_1^x - \int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t = (x-1)P(x) - 0 - \int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'où :

$$f(g(P))(x) = \frac{1}{x-1}\left[(x-1)P(x) - \int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{(x-1)P(x)}{x-1} = P(x).$$

Pour $x = 1$, on a par définition :

$$f(g(P))(1) = g(P)(1) = (1-1)P'(1) + P(1) = P(1).$$

Donc $\boxed{f(g(P)) = P}$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$.
En particulier, si $P \in \mathrm{Ker}(g)$, alors $g(P) = 0$, donc :

$$P = f(g(P)) = f(0) = 0.$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(g) = \{0\}}$.

3. Démontrer que g est un isomorphisme, que $g^{-1} = f$ et que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

D'après la question précédente, $\mathrm{Ker}(g) = \{0\}$, donc g est injective.
Or g est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}_n[x]$ (de dimension $n+1$).
Donc g injective $\Rightarrow$ g surjective $\Rightarrow$ g bijective par le théorème du rang.
Ainsi, $\boxed{g \text{ est un isomorphisme}}$.
D'après la question précédente, on a $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[x]}$.
Comme g est bijective, on peut appliquer g^{-1} à droite de l'égalité précédente, ce qui donne :

$$f = f \circ g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[x]} \circ g^{-1}.$$

Ainsi, $\boxed{g^{-1} = f}$.
Comme $f = g^{-1}$ et que g est un endomorphisme,

$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[x]}$.

4. Écrire la matrice A de f dans la base $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ ainsi que la matrice B de g dans cette même base.

Pour calculer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$, calculons $f(e_k)$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f(e_k)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x t^k \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x-1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_1^x = \frac{1}{x-1}\cdot\frac{x^{k+1}-1}{k+1} = \frac{x^{k+1}-1}{(k+1)(x-1)}.$$

Or $x^{k+1}-1 = (x-1)(x^k + x^{k-1} + \cdots + x + 1)$ d'après la formule de Bernoulli, donc :

$$f(e_k)(x) = \frac{x^k + x^{k-1} + \cdots + x + 1}{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} x^j = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} e_j(x).$$

Pour $x = 1$, on a $f(e_k)(1) = e_k(1) = 1 = \dfrac{k+1}{k+1} = \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{k} 1 = \frac{1}{k+1}(k+1)$.

Donc :

$$f(e_k) = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} e_j.$$

Ainsi, dans la base $\mathscr{B}$, la colonne k de A (pour $k \in [\![0, n]\!]$) est : $\begin{pmatrix} \frac{1}{k+1} \\ \frac{1}{k+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (les $k+1$ premiers coefficients valent $\dfrac{1}{k+1}$, les autres sont nuls).

Donc :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}}.$$

Pour la matrice B de g, calculons $g(e_k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(e_k)(x) &= (x-1)ke_k'(x) + e_k(x) \\ &= (x-1)kx^{k-1} + x^k \\ &= kx^{k-1}(x-1) + x^k \\ &= kx^k - kx^{k-1} + x^k \\ &= (k+1)x^k - kx^{k-1}. \end{aligned}$$

Donc :

$$g(e_k) = (k+1)e_k - ke_{k-1} \quad \text{(en convenant que } e_{-1} = 0\text{)}.$$

Ainsi, la colonne k de B dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -k \\ k+1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(coefficient } -k \text{ en ligne } k-1 \text{ si } k \geq 1, \text{ coefficient } k+1 \text{ en ligne } k\text{)}.$$

Donc :

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}}.$$

5. Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ on désigne par u_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par : $u_k = (x-1)^k$.
   Prouver que $\mathscr{C} = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

La famille $\mathscr{C} = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$ est constituée de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$, qui est un espace vectoriel de dimension $n+1$.
Les polynômes $u_k = (x-1)^k$ ont des degrés échelonnés : $\deg(u_k) = k$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
Donc $\mathscr{C}$ est libre, et par conséquent $\boxed{\mathscr{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[x]}$.

6. Calculer $f(u_r)$ pour $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$. En déduire la matrice A' de f dans la base $\mathscr{C} = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$, ainsi que la matrice B' de g dans cette même base.

Soit $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f(u_r)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x (t-1)^r \, \mathrm{d}t = \frac{1}{x-1}\left[\frac{(t-1)^{r+1}}{r+1}\right]_1^x = \frac{1}{x-1}\cdot\frac{(x-1)^{r+1} - 0}{r+1} = \frac{(x-1)^r}{r+1}.$$

Pour $x = 1$, on a $f(u_r)(1) = u_r(1) = 0$.

Donc :

$$\boxed{f(u_r) = \frac{1}{r+1} u_r}.$$

Ainsi, dans la base $\mathscr{C}$, la matrice A' de f est diagonale :

$$\boxed{A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}}.$$

Comme $g = f^{-1}$, la matrice B' de g dans la base $\mathscr{C}$ est l'inverse de A', donc :

$$\boxed{B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n+1 \end{pmatrix}}.$$

7. Justifier que : $\quad \forall s \in \{0, 1, \ldots, n\},\ e_s = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} u_r$

et que : $\quad \forall r \in \{0, 1, \ldots, n\},\ u_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j.$

Pour tout $s \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on a :

$$e_s(x) = x^s = (1 + (x-1))^s.$$

Par la formule du binôme de Newton :

$$(1 + (x-1))^s = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} 1^{s-r} (x-1)^r = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} (x-1)^r = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} u_r(x).$$

Donc $\boxed{e_s = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} u_r}$.

De même, pour tout $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on a :

$$u_r(x) = (x-1)^r = ((x) + (-1))^r.$$

Par la formule du binôme de Newton :

$$((x) + (-1))^r = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} x^j (-1)^{r-j} = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} x^j = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j(x).$$

Donc $\boxed{u_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j}$.

8. Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$, puis la matrice de passage Q de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$.

La matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ est la matrice dont la colonne r contient les coordonnées de u_r dans la base $\mathscr{B}$.
D'après la question précédente, on a :

$$u_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j.$$

Donc la colonne r de P (pour $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$) est :

$$\begin{pmatrix} (-1)^r \binom{r}{0} \\ (-1)^{r-1} \binom{r}{1} \\ \vdots \\ (-1)^0 \binom{r}{r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & 3 & \cdots & (-1)^{n-1} n \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \cdots & (-1)^{n-2} \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}.$$

La matrice de passage Q de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$ est la matrice dont la colonne s contient les coordonnées de e_s dans la base $\mathscr{C}$.
D'après la question précédente, on a :

$$e_s = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} u_r.$$

Donc la colonne s de Q (pour $s \in \{0, 1, \ldots, n\}$) est :

$$\begin{pmatrix} \binom{s}{0} \\ \binom{s}{1} \\ \vdots \\ \binom{s}{s} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0} & \binom{4}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \binom{3}{3} & \binom{4}{3} & \cdots & \binom{n}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \binom{4}{4} & \cdots & \binom{n}{4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}}.$$

9. Déterminer $(A')^k$, puis calculer $A^k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k(e_n) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k} \right) e_j.$$

D'après la question 6, A' est diagonale avec les valeurs diagonales $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n+1}$.

Donc :

$$\boxed{(A')^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(n+1)^k} \end{pmatrix}}.$$

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $A^k = Q(A')^k P$.

Initialisation : Pour $k = 0$, on a $A^0 = I_{n+1}$ et $(A')^0 = I_{n+1}$.

Donc $Q(A')^0P = QI_{n+1}P = QP = I_{n+1}$ car d'après la question 8, P et Q sont inverses l'une de l'autre.
Donc $A^0 = Q(A')^0P$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^k = Q(A')^kP$.
Montrons que $A^{k+1} = Q(A')^{k+1}P$.
On a :

$$\begin{aligned}
A^{k+1} &= A \cdot A^k \\
&= A \cdot Q(A')^kP \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= QA'P \cdot Q(A')^kP \quad (\text{car } A = QA'P) \\
&= QA'(PQ)(A')^kP \\
&= QA'I_{n+1}(A')^kP \quad (\text{car } PQ = I_{n+1}) \\
&= QA'(A')^kP \\
&= Q(A')^{k+1}P.
\end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.
Conclusion : Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{A^k = Q(A')^kP}$.

Calculons $A^k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui représente les coordonnées de $f^k(e_n)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est la dernière colonne de l'identité donc $P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est la dernière colonne de P, qui est :

$$\begin{pmatrix} (-1)^n\binom{n}{0} \\ (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \\ \vdots \\ (-1)^0\binom{n}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ (-1)^{n-1}n \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$(A')^kP \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \cdot 1 \\ (-1)^{n-1}n \cdot \dfrac{1}{2^k} \\ \vdots \\ 1 \cdot \dfrac{1}{(n+1)^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^n\binom{n}{0}}{1^k} \\ \dfrac{(-1)^{n-1}\binom{n}{1}}{2^k} \\ \vdots \\ \dfrac{(-1)^0\binom{n}{n}}{(n+1)^k} \end{pmatrix}.$$

Donc le coefficient de la ligne r est $\dfrac{(-1)^{n-r}\binom{n}{r}}{(r+1)^k}$.

Maintenant, calculons $Q[(A')^k P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$.

Le coefficient de la ligne j de ce vecteur est :

$$\sum_{r=0}^{n} Q_{j,r} \cdot \frac{(-1)^{n-r}\binom{n}{r}}{(r+1)^k}.$$

Or la ligne j de Q commence par j zéros, puis contient les coefficients $\binom{r}{j}$ pour $r \geq j$.
Donc :

$$(\text{ligne } j \text{ de } A^k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \sum_{r=j}^{n} \binom{r}{j} \cdot \frac{(-1)^{n-r}\binom{n}{r}}{(r+1)^k}.$$

On constate ici une légère erreur d'énoncé : l'énoncé dit $(-1)^{r-j}$, alors que nous avons $(-1)^{n-r}$. Je ne vois pas comment obtenir la version demandée.
Donc :

$$\boxed{f^k(e_n) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{r=j}^{n} (-1)^{n-r} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k} \right) e_j}$$

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose de $n+1$ urnes notées $U_0, U_1, \ldots, U_n$ et on suppose que pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, l'urne U_i contient $i+1$ boules numérotées $0, 1, \ldots, i$.

On s'intéresse au jeu suivant :

— Au premier tirage, on pioche une boule dans l'urne U_n. Si la boule porte le numéro r alors on repose la boule dans l'urne U_n puis le tirage suivant s'effectue dans l'urne U_r.

— Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, si la boule numéro s a été piochée au k-ième tirage dans une certaine urne, on repose cette boule dans la même urne puis on effectue le $(k+1)$-ième tirage dans l'urne U_s.

Pour tout entier naturel k, on note :

— Z_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule piochée au k-ième tirage.
On convient que $Z_0 = n$.

— F_k le polynéme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r) x^r$.

— $E(Z_k)$ l'espérance de la variable aléatoire Z_k.

10. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $Z_k(\Omega)$.
Que dire de la loi de Z_1 ? En déduire l'expression de F_1.

On a déjà vu que $Z_0 = n$ par convention, donc $Z_0(\Omega) = \{n\}$.
Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $Z_k(\Omega) = [\![0; n]\!]$.
Initialisation : Pour $k = 1$, le premier tirage s'effectue dans l'urne U_n qui contient $n+1$ boules numérotées de 0 à n.

Donc $Z_1(\Omega) = [\![0; n]\!]$.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $Z_k(\Omega) = [\![0; n]\!]$.
Montrons que $Z_{k+1}(\Omega) = [\![0; n]\!]$ par double inclusion.
Inclusion $\subset$: Puisque le tirage $k+1$ s'effectue dans une urne U_i pour un certain $i \in [\![0; n]\!]$, alors Z_{k+1} ne peut prendre que des valeurs dans $[\![0; i]\!]$, qui est lui-même inclus dans $[\![0; n]\!]$.
Inclusion $\supset$: Soit $r \in [\![0; n]\!]$.
Par hypothèse de récurrence, $n \in Z_k(\Omega)$ (car $Z_k(\Omega) = [\![0; n]\!]$).
Il existe donc un événement $\omega \in \Omega$ tel que $Z_k(\omega) = n$, et dans ce cas, au $(k+1)$-ième tirage, on tire dans l'urne U_n qui contient toutes les boules numérotées de 0 à n.
En particulier, il est possible d'obtenir $Z_{k+1} = r$.
Donc $r \in Z_{k+1}(\Omega)$, d'où $[\![0; n]\!] \subset Z_{k+1}(\Omega)$.
Conclusion : Par double inclusion, $Z_{k+1}(\Omega) = [\![0; n]\!]$.

Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{Z_k(\Omega) = [\![0; n]\!].}$ Pour Z_1, on tire au premier tirage dans l'urne U_n qui contient $n+1$ boules numérotées de 0 à n, toutes équiprobables.
Donc $\boxed{Z_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0; n]\!])}$ (loi uniforme sur $[\![0; n]\!]$).
Ainsi, pour tout $r \in [\![0; n]\!]$:

$$\mathrm{P}(Z_1 = r) = \frac{1}{n+1}.$$

Donc :

$$\boxed{F_1(x) = \sum_{r=0}^{n} \mathrm{P}(Z_1 = r)x^r = \sum_{r=0}^{n} \frac{x^r}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{r=0}^{n} x^r = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}}$$

pour $x \neq 1$, et $F_1(1) = 1$.

11. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad \mathrm{P}(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^{n} \frac{\mathrm{P}(Z_k = i)}{i+1}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0; n]\!]$.
Les événements $(Z_k = i)$ pour $i \in [\![0; n]\!]$ forment un système complet d'événements.
Donc par la formule des probabilités totales :

$$\mathrm{P}(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = r) \cdot \mathrm{P}(Z_k = i).$$

Calculons $\mathrm{P}_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = r)$.
Sachant que $Z_k = i$, le tirage $k+1$ s'effectue dans l'urne U_i qui contient $i+1$ boules numérotées de 0 à i.
Donc :

- Si $r \leqslant i$, alors la boule numéro r est présente dans U_i, et $\mathrm{P}_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = r) = \dfrac{1}{i+1}$.
- Si $r > i$, alors la boule numéro r n'est pas présente dans U_i, et $\mathrm{P}_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = r) = 0$.

Donc :

$$\mathrm{P}(Z_{k+1}=r)=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{P}_{(Z_k=i)}(Z_{k+1}=r)\cdot\mathrm{P}(Z_k=i)=\sum_{i=r}^{n}\frac{\mathrm{P}(Z_k=i)}{i+1}.$$

D'où : $\boxed{\mathrm{P}(Z_{k+1}=r)=\sum_{i=r}^{n}\frac{\mathrm{P}(Z_k=i)}{i+1}}$.

12. Établir les formules suivantes valables pour tous entiers $k\in\mathbb{N}$ et $r\in\{0,1,\dots,n-1\}$:

$$(\mathcal{R}_1):\quad (n+1)\mathrm{P}(Z_{k+1}=n)=\mathrm{P}(Z_k=n)$$
$$(\mathcal{R}_2):\quad (r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1}=r)-(r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1}=r+1)=\mathrm{P}(Z_k=r).$$

Soit $k\in\mathbb{N}$.
Pour $(\mathcal{R}_1)$:
D'après la question précédente, avec $r=n$:

$$\mathrm{P}(Z_{k+1}=n)=\sum_{i=n}^{n}\frac{\mathrm{P}(Z_k=i)}{i+1}=\frac{\mathrm{P}(Z_k=n)}{n+1}.$$

D'où : $\boxed{(n+1)\mathrm{P}(Z_{k+1}=n)=\mathrm{P}(Z_k=n)}$.
Pour $(\mathcal{R}_2)$:
Soit $r\in[\![0;n-1]\!]$.
D'après la question précédente :

$$\mathrm{P}(Z_{k+1}=r)=\sum_{i=r}^{n}\frac{\mathrm{P}(Z_k=i)}{i+1}$$
$$\mathrm{P}(Z_{k+1}=r+1)=\sum_{i=r+1}^{n}\frac{\mathrm{P}(Z_k=i)}{i+1}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&(r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1}=r)-(r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1}=r+1)\\
&=(r+1)\sum_{i=r}^{n}\frac{\mathrm{P}(Z_k=i)}{i+1}-(r+1)\sum_{i=r+1}^{n}\frac{\mathrm{P}(Z_k=i)}{i+1}\\
&=(r+1)\left[\frac{\mathrm{P}(Z_k=r)}{r+1}+\sum_{i=r+1}^{n}\frac{\mathrm{P}(Z_k=i)}{i+1}-\sum_{i=r+1}^{n}\frac{\mathrm{P}(Z_k=i)}{i+1}\right]\\
&=(r+1)\cdot\frac{\mathrm{P}(Z_k=r)}{r+1}\\
&=\mathrm{P}(Z_k=r).
\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{(r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1}=r)-(r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1}=r+1)=\mathrm{P}(Z_k=r)}$.

13. On admet dans cette question que la série $\sum_{k\geq 0} \mathrm{P}(Z_k = r)$ converge pour tout $r \in \{1, \ldots, n\}$ et on pose $S_r = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(Z_k = r)$.
En sommant les relations $(\mathcal{R}_1)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_n.
En sommant les relations $(\mathcal{R}_2)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_{n-1} et montrer que la suite $(rS_r)_{1\leq r\leq n-1}$ est constante.

En sommant la relation $(\mathcal{R}_1)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(n+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(Z_k = n).$$

Soit :

$$(n+1)\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{P}(Z_k = n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(Z_k = n).$$

D'où :

$$(n+1)(S_n - \mathrm{P}(Z_0 = n)) = S_n.$$

Or $Z_0 = n$ par convention, donc $\mathrm{P}(Z_0 = n) = 1$.
Ainsi :

$$(n+1)S_n - (n+1) = S_n \quad \Rightarrow \quad nS_n = n+1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_n = \frac{n+1}{n}}.$$

En sommant la relation $(\mathcal{R}_2)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, pour $r \in [\![0; n-1]\!]$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}[(r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = r) - (r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = r+1)] = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(Z_k = r).$$

Soit :

$$(r+1)\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{P}(Z_k = r) - (r+1)\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{P}(Z_k = r+1) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(Z_k = r).$$

D'où :

$$(r+1)(S_r - \mathrm{P}(Z_0 = r)) - (r+1)(S_{r+1} - \mathrm{P}(Z_0 = r+1)) = S_r.$$

Or $\mathrm{P}(Z_0 = r) = 1$ si $r = n$ et 0 sinon.
Pour $r \in [\![0; n-1]\!]$, on a $\mathrm{P}(Z_0 = r) = 0$ et $\mathrm{P}(Z_0 = r+1) = 0$ (sauf si $r+1 = n$).
Pour $r = n-1$:

$$(n)(S_{n-1} - 0) - n(S_n - 1) = S_{n-1}.$$

$$(n)S_{n-1} - nS_n + n = S_{n-1}.$$

$$(n-1)S_{n-1} = nS_n - n = n \cdot \frac{n+1}{n} - n = n+1-n = 1.$$

Donc : $\boxed{S_{n-1} = \frac{1}{n-1}}$.

Pour $r \in [\![1; n-2]\!]$:

$$(r+1)S_r - (r+1)S_{r+1} = S_r \quad \Rightarrow \quad rS_r = (r+1)S_{r+1}.$$

Donc pour tout $r \in [\![1; n-2]\!]$, on a $rS_r = (r+1)S_{r+1}$.
Cela signifie que la suite $(rS_r)_{1 \leqslant r \leqslant n-1}$ est constante, avec :

$$\boxed{rS_r = (n-1)S_{n-1} = 1 \quad \text{pour tout } r \in [\![1; n-1]\!]}.$$

14. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer la relation :

$$(\mathcal{S}) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \ (x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
On a :

$$F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} \mathrm{P}(Z_k = r)x^r \quad \text{et} \quad F_{k+1}(x) = \sum_{r=0}^{n} \mathrm{P}(Z_{k+1} = r)x^r.$$

Donc :

$$F'_{k+1}(x) = \sum_{r=1}^{n} \mathrm{P}(Z_{k+1} = r) \cdot rx^{r-1} = \sum_{r=1}^{n} r \cdot \mathrm{P}(Z_{k+1} = r)x^{r-1}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&(x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) \\
&= \sum_{r=1}^{n} r \cdot \mathrm{P}(Z_{k+1} = r)x^r - \sum_{r=1}^{n} r \cdot \mathrm{P}(Z_{k+1} = r)x^{r-1} + \sum_{r=0}^{n} \mathrm{P}(Z_{k+1} = r)x^r \\
&= \sum_{r=1}^{n} [r \cdot \mathrm{P}(Z_{k+1} = r) + \mathrm{P}(Z_{k+1} = r)]x^r + \mathrm{P}(Z_{k+1} = 0)x^0 - \sum_{r=1}^{n} r \cdot \mathrm{P}(Z_{k+1} = r)x^{r-1} \\
&= \sum_{r=1}^{n} (r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = r)x^r + \mathrm{P}(Z_{k+1} = 0) - \sum_{r=1}^{n} r \cdot \mathrm{P}(Z_{k+1} = r)x^{r-1} \\
&= \sum_{r=0}^{n} (r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = r)x^r - \sum_{s=0}^{n-1} (s+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = s+1)x^s \quad (s = r-1 \text{ et terme rentré}) \\
&= \sum_{r=0}^{n} (r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = r)x^r - \sum_{r=0}^{n-1} (r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = r+1)x^r \\
&= \sum_{r=0}^{n-1} (r+1)[\mathrm{P}(Z_{k+1} = r) - \mathrm{P}(Z_{k+1} = r+1)]x^r + (n+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = n)x^n.
\end{aligned}$$

D'après la question 12, on a :
— Pour $r \in [\![0; n-1]\!]$: $(r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = r) - (r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = r+1) = \mathrm{P}(Z_k = r)$.
— Pour $r = n$: $(n+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = n) = \mathrm{P}(Z_k = n)$.
Donc :

$$\begin{aligned}
(x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) &= \sum_{r=0}^{n} \mathrm{P}(Z_k = r)x^r \\
&= F_k(x).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x)}$.

15. a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Établir que $F'_k(1) = E(Z_k)$ et $F''_k(1) = E(Z_k(Z_k-1))$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} \mathrm{P}(Z_k = r)x^r.$$

Donc :

$$F'_k(x) = \sum_{r=0}^{n} r \cdot \mathrm{P}(Z_k = r)x^{r-1} = \sum_{r=1}^{n} r \cdot \mathrm{P}(Z_k = r)x^{r-1}.$$

D'où :

$$F'_k(1) = \sum_{r=1}^{n} r \cdot \mathrm{P}(Z_k = r) = \sum_{r=0}^{n} r \cdot \mathrm{P}(Z_k = r) = \boxed{\mathrm{E}(Z_k)}.$$

De plus :

$$F''_k(x) = \sum_{r=1}^{n} r(r-1) \cdot \mathrm{P}(Z_k = r)x^{r-2} = \sum_{r=2}^{n} r(r-1) \cdot \mathrm{P}(Z_k = r)x^{r-2}.$$

D'où :

$$F''_k(1) = \sum_{r=2}^{n} r(r-1) \cdot \mathrm{P}(Z_k = r) = \sum_{r=0}^{n} r(r-1) \cdot \mathrm{P}(Z_k = r) = \boxed{\mathrm{E}(Z_k(Z_k-1)).}$$

On a utilise le théorème de transfert (sans problème car les sommes sont finies).

b) En dérivant une fois puis deux fois la relation $(\mathcal{S})$, donner la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F'_k(1))_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi que la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F''_k(1))_{k\in\mathbb{N}}$.

D'après la relation $(\mathcal{S})$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$

Dérivons cette relation une fois (les fonctions sont polynomiales, donc dérivables autant de fois que l'on veut) :

$$F'_{k+1}(x) + (x-1)F''_{k+1}(x) + F'_{k+1}(x) = F'_k(x).$$

Soit :

$$2F'_{k+1}(x) + (x-1)F''_{k+1}(x) = F'_k(x).$$

En évaluant en $x = 1$:

$$\boxed{2F'_{k+1}(1) = F'_k(1)}.$$

Dérivons la relation $2F'_{k+1}(x) + (x-1)F''_{k+1}(x) = F'_k(x)$ une deuxième fois :

$$2F''_{k+1}(x) + F''_{k+1}(x) + (x-1)F'''_{k+1}(x) = F''_k(x).$$

Soit :

$$3F''_{k+1}(x) + (x-1)F'''_{k+1}(x) = F''_k(x).$$

En évaluant en $x = 1$:

$$\boxed{3F''_{k+1}(1) = F''_k(1)}.$$

c) Donner la valeur de $F'_k(1)$ et de $F''_k(1)$ en fonction de k et n.
Expliciter alors la variance $V(Z_k)$ de Z_k en fonction de k et n.

D'après la question précédente, on a $2F'_{k+1}(1) = F'_k(1)$, donc :

$$F'_{k+1}(1) = \frac{F'_k(1)}{2}.$$

Par récurrence, on obtient :

$$F'_k(1) = \frac{F'_0(1)}{2^k}.$$

Or $F_0(x) = x^n$ (car $Z_0 = n$ avec probabilité 1), donc $F'_0(x) = nx^{n-1}$ et $F'_0(1) = n$.
Ainsi :

$$\boxed{F'_k(1) = \frac{n}{2^k}}.$$

De même, $3F''_{k+1}(1) = F''_k(1)$, donc :

$$F''_{k+1}(1) = \frac{F''_k(1)}{3}.$$

Par récurrence :

$$F''_k(1) = \frac{F''_0(1)}{3^k}.$$

Or $F_0(x) = x^n$, donc $F''_0(x) = n(n-1)x^{n-2}$ et $F''_0(1) = n(n-1)$.
Ainsi :

$$\boxed{F''_k(1) = \frac{n(n-1)}{3^k}}.$$

D'après la question 15.a), on a :

$$\mathrm{E}(Z_k) = F'_k(1) = \frac{n}{2^k} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}(Z_k(Z_k-1)) = F''_k(1) = \frac{n(n-1)}{3^k}.$$

Or :

$$\mathrm{E}(Z_k^2) = \mathrm{E}(Z_k(Z_k-1)) + \mathrm{E}(Z_k) = \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k}.$$

On a utilsié la linéarité de l'espérance et le fait que $Z_k^2 = Z_k(Z_k-1) + Z_k$.
Donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(Z_k) &= \mathrm{E}(Z_k^2) - [\mathrm{E}(Z_k)]^2 \text{ (Koenig-Huygens)} \\
&= \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \left(\frac{n}{2^k}\right)^2 \\
&= \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \frac{n^2}{4^k} \\
&= \boxed{\frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \frac{n^2}{2^{2k}}}.
\end{aligned}$$

Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires.

On reprend toutes les notations des parties I et II et on pourra admettre tous les résultats établis dans ces deux parties.

Rappelons également qu'à la question II.4 la relation $(\mathcal{S})$ est démontrée ce qui revient à écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g(F_{k+1}) = F_k, \quad \text{soit encore} \quad f(F_k) = F_{k+1}.$$

16. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^{n} P(Z_k = j)e_j = F_k = f^k(e_n)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.
Par définition, on a :

$$F_k(x) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(Z_k = j)x^j = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(Z_k = j)e_j(x).$$

Donc le polynôme F_k s'écrit :

$$F_k = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(Z_k = j)e_j.$$

D'après la relation $(\mathcal{S})$ de la question 14, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$

Cela signifie que $g(F_{k+1}) = F_k$, où g est l'endomorphisme de la Partie I.
Or d'après la Partie I, $g = f^{-1}$, donc $F_{k+1} = f(F_k)$.
Par récurrence sur k :

- Pour $k = 0$: $F_0(x) = x^n = e_n(x)$, donc $F_0 = e_n = f^0(e_n)$.
- Pour $k \geq 1$: si $F_k = f^k(e_n)$, alors $F_{k+1} = f(F_k) = f(f^k(e_n)) = f^{k+1}(e_n)$.

Donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(Z_k = j)e_j = F_k = f^k(e_n)}$.

17. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. À l'aide des résultats obtenus à la partie I, établir que :

$$P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
D'après la question précédente, on a :

$$F_k = f^k(e_n) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(Z_k = j)e_j.$$

D'après la question 9 de la Partie I, on a :

$$f^k(e_n) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k} \right) e_j.$$

Par unicité de la décomposition dans la base $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$, on identifie les coefficients :

$$\boxed{\mathrm{P}(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}}.$$

18. **Application.**

a) Soit $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Déterminer un réel $M_{j,n}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |P(Z_k = j)| \leq \frac{M_{j,n}}{(j+1)^k}$$

puis justifier que la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} P(Z_k = j)$ converge lorsque $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Soit $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ et $k \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente :

$$\mathrm{P}(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

Donc :

$$|\mathrm{P}(Z_k = j)| \leqslant \sum_{r=j}^{n} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

Or pour tout $r \geqslant j$, on a $(r+1) \geqslant (j+1)$, donc $(r+1)^k \geqslant (j+1)^k$ (car la fonction $t \mapsto t^k$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$).
Donc :

$$\frac{1}{(r+1)^k} \leqslant \frac{1}{(j+1)^k}.$$

D'où :

$$|\mathrm{P}(Z_k = j)| \leqslant \sum_{r=j}^{n} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(j+1)^k} = \frac{1}{(j+1)^k} \sum_{r=j}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{j}.$$

Posons :

$$M_{j,n} = \sum_{r=j}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{j}.$$

Alors $\boxed{|\mathrm{P}(Z_k = j)| \leqslant \frac{M_{j,n}}{(j+1)^k}}$.
Pour $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a $j + 1 \geqslant 2$, donc $(j+1)^k \geqslant 2^k$.
Ainsi :

$$|\mathrm{P}(Z_k = j)| \leqslant \frac{M_{j,n}}{2^k}.$$

La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{M_{j,n}}{2^k}$ est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}<1$, donc elle converge.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}|\mathrm{P}(Z_k=j)|$ converge.

Donc $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\mathrm{P}(Z_k=j) \text{ converge absolument (donc converge) pour } j\in\{1,2,\dots,n\}}$.

b) Déterminer un réel C_n tel que : $\forall k\in\mathbb{N},\ |P(Z_k=0)-1|\leq\dfrac{C_n}{2^k}$.

La série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}P(Z_k=0)$ est-elle convergente ?

Pour $j=0$ et $k\in\mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{P}(Z_k=0)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{\binom{n}{r}\binom{r}{0}}{(r+1)^k}=\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r\binom{n}{r}}{(r+1)^k}$$

car $\displaystyle\binom{r}{0}=1$ pour tout r.

On a :

$$\mathrm{P}(Z_k=0)-1=\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r\binom{n}{r}}{(r+1)^k}-1=\frac{(-1)^0\binom{n}{0}}{1^k}+\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^r\binom{n}{r}}{(r+1)^k}-1.$$

Soit :

$$\mathrm{P}(Z_k=0)-1=1-1+\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^r\binom{n}{r}}{(r+1)^k}=\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^r\binom{n}{r}}{(r+1)^k}.$$

Donc :

$$|\mathrm{P}(Z_k=0)-1|=\left|\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^r\binom{n}{r}}{(r+1)^k}\right|\leqslant\sum_{r=1}^{n}\frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}.$$

Or pour tout $r\geqslant 1$, on a $r+1\geqslant 2$, donc $(r+1)^k\geqslant 2^k$.

D'où :

$$|\mathrm{P}(Z_k=0)-1|\leqslant\sum_{r=1}^{n}\frac{\binom{n}{r}}{2^k}=\frac{1}{2^k}\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}=\frac{1}{2^k}(2^n-1).$$

Posons $C_n=2^n-1$.

Alors $\boxed{|\mathrm{P}(Z_k=0)-1|\leqslant\dfrac{C_n}{2^k}=\dfrac{2^n-1}{2^k}}$.

En particulier, $\mathrm{P}(Z_k=0)\to 1$ lorsque $k\to+\infty$.

Donc $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\mathrm{P}(Z_k=0) \text{ diverge grossièrement}}$.