La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies numpy et numpy.random de Python sont importées avec les commandes respectives import numpy as np, et import numpy.random as rd.

Exercice 1 - EDHEC 2026

Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration les formules $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ et $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

On rappelle le développement limité à l'ordre 5 de la fonction sinus au voisinage de 0 donné par :

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

1. Montrer que l'on définit parfaitement deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant $u_1 = 0$, $v_1 = 2$ et, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{v_n}{u_{n+1}}$$

2. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie v_n.

```
def suite_v(n):
    u=0
    v=2
    for k in range(2,n+1):
        ...
        ...
    return v
```

3. a) Montrer qu'il existe une unique suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont les éléments appartiennent à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \cos(\alpha_n)$

   b) Expliciter α_n en fonction de n, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

   c) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $v_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ puis donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

4. Déterminer les constantes réelles a, b et c telles que :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} a + \frac{b}{4^n} + \frac{c}{4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

5. Accélération de convergence par la méthode de Richardson.

   On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{4v_{n+1} - v_n}{3}$.

a) Écrire en Python une fonction **suite_w** utilisant la fonction **suite_v** et qui renvoie w_n.

b) Donner la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Montrer que $w_n \underset{n\to+\infty}{=} \pi - \dfrac{\pi^5}{2\times 480\times 4^{2n}} + o\left(\dfrac{1}{4^{2n}}\right)$, puis déterminer un équivalent de $\dfrac{w_n-\pi}{v_n-\pi}$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

d) Dans le cadre de la recherche d'une valeur approchée de π, quel intérêt y a-t-il à utiliser la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ plutôt que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

6. Généralisation de la méthode de Richardson.

Étant donnés deux réels q et r de $]0,1[$ tels que $q>r$, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$$\exists (a,b,c)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*,\quad x_n \underset{n\to+\infty}{=} a+bq^n+cr^n+o(r^n)$$

a) Définir une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme général est combinaison linéaire de x_n et x_{n+1}, qui vérifie $y_n \underset{n\to+\infty}{=} a+dr^n+o(r^n)$, où d est une constante à déterminer en fonction de c, q et r.

b) Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} a+bq^n+o(q^n)$.

c) En déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers a plus rapidement que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2 - EDHEC 2026 (sauf une question sur les espérances totales)

On suppose que toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$.

Partie 1

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.

Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : à chaque instant k ($k\in\mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisses $0,1,\ldots,k$.

Pour tout entier naturel k, on note X_k la variable aléatoire égale à l'abscisse de ce point à l'instant k (on a donc $X_0=0$).

On admet que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. a) Déterminer, pour tout entier naturel k non nul, la loi de X_k.

   b) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, X_k possède une espérance et une variance, puis calculer $\mathbb{E}(X_k)$ et $\mathbb{V}(X_k)$.

2. On note Y la variable aléatoire égale au rang du premier retour à l'origine du mobile (sans prendre en compte son positionnement au départ) et on pose $Y=0$ s'il n'y a aucun retour à l'origine.

   a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'événement $(Y=n)$ à l'aide des variables aléatoires $X_1,X_2,\ldots,X_n$.

   b) En déduire que l'on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}(Y=n)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

   c) Déterminer par le calcul la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=n)$. En déduire $\mathbb{P}(Y=0)$.

   d) La variable Y admet-elle une espérance ?

Partie 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère une variable aléatoire U_n telle que $U_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$ et qui suit la loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on considère également une variable aléatoire Z_n dont la loi, conditionnellement à l'événement $(U_n = k)$, est la loi géométrique de paramètre $1 - \dfrac{k}{n}$.

3. Simulation informatique de Z_n.
   Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule U_n et Z_n et renvoie la valeur prise par Z_n.

```
def var_Z(n):
    U=-------
    Z=-------
    return Z
```

4. a) Montrer que, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on a l'égalité :

$$\mathbb{P}(Z_n = i) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}$$

   b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n = i)$.

   c) On peut ici, comme dans le cas de la convergence d'une suite de lois binomiales vers une loi de Poisson, dire que Z_n converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi.

   On admet le résultat suivant, qu'on pourra montrer l'an prochain avec des résultats sur l'espérance totale :

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

5. Équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

   a) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

   b) Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'encadrement :

$$\ln(n) + 1 \leq \mathbb{E}(Z_n) \leq \ln(n+1) + 1$$

   c) En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$.

Problème - EML 2020

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

PARTIE A : Étude de la suite des racines des polynômes P_n

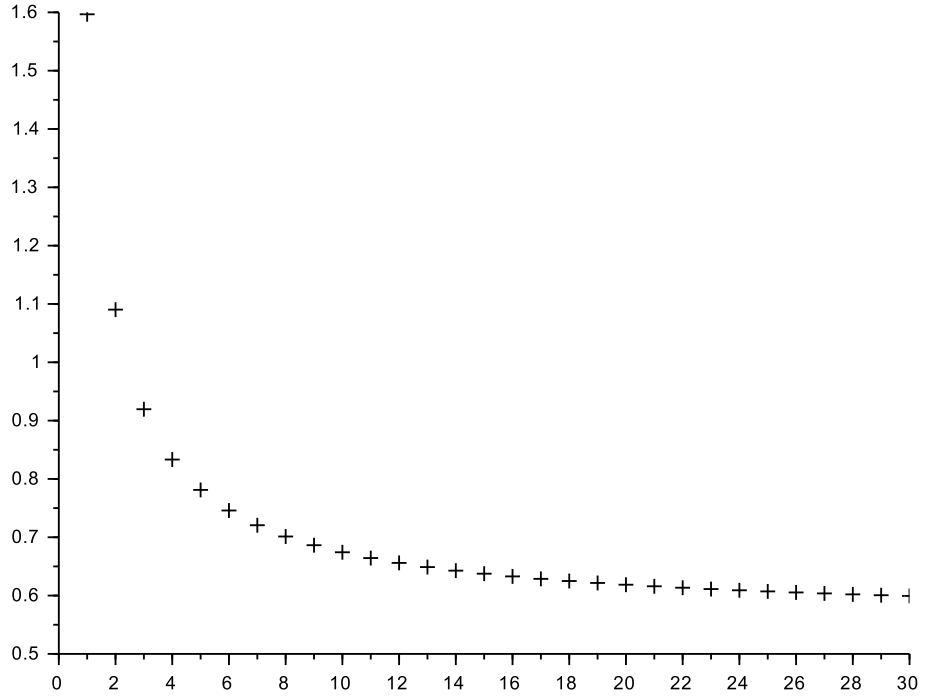
1. a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les limites de P_n en $+\infty$ et $-\infty$.
   b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme P_n admet au moins une racine réelle.
2. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n'(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
   b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines de P_n sont toutes simples.
3. a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right)$.
   b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines réelles de P_n appartiennent nécessairement à l'intervalle $[1; 2n+1]$.
4. a) Montrer les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} P_{n+1}'(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}, \\ P_{n+1}''(x) = P_n(x). \end{cases}$$

   b) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois, en un réel noté u_n.
5. a) Écrire une fonction Python d'en-tête `def factorial(k):` qui renvoie la valeur de $k!$.
   b) Écrire une fonction Python d'en-tête `def P(n, x):` qui prend pour arguments un entier n de $\mathbb{N}$ et un réel x, et qui renvoie la valeur de $P_n(x)$.
   c) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant pour argument un entier n de $\mathbb{N}$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
1.  def suite(n):
2.      a = .........
3.      b = .........
4.      c = (a+b)/2
5.      while .........
6.          if .........
7.              a = c
8.          else
9.              b = c
10.
11.        c = .........
13.    .........
```

d) On utilise la fonction précédente pour représenter les premiers termes de la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. Conjecturer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ et la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



6. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(u_n) = \dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \dfrac{u_n}{2n+3}\right)$.

   b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

7. On suppose **dans cette question** que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

   a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ |P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leqslant e^{\ell}|u_n - \ell|$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(\ell)$. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(u_n) = e^{-\ell}$.

   c) Aboutir à une contradiction.

8. En déduire la nature et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

PARTIE B : Quelques résultats intermédiaires

Les deux questions de cette partie sont indépendantes entre elles et indépendantes de la partie A.

9. On note f la fonction définie sur $]0;1]$ par : $\forall t \in]0;1],\ f(t) = -\ln(t)$.

   a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ converge et préciser sa valeur.

   b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

   Justifier, pour tout k de $[\![1; n+1]\!]$: $\dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \leqslant \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leqslant \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

   En déduire : $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt + \frac{\ln(n)}{n}$.

c) En déduire la limite de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Montrer finalement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = e^{-1}$.

10. On note g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\forall t \in]0;+\infty[,\ g(t) = t + \ln(t) + 1$.
Montrer qu'il existe un unique α appartenant à $]0;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$ et justifier :

$$e^{-2} < \alpha < e^{-1}.$$

PARTIE C : Équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

11. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt.$

b) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ P_n(x) \leqslant e^{-x} \leqslant P_n(x) + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

12. Soit n un entier de $\mathbb{N}$.

a) Montrer : $P_{n+1}(u_n) \leqslant e^{-u_n} \leqslant \dfrac{(u_n)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

b) En utilisant le résultat des questions (3)(b) et (6)(a), obtenir :

$$\frac{2(u_n)^{2n}}{(2n+3)!} \leqslant e^{-u_n} \leqslant \frac{(u_n)^{2n}}{(2n)!},$$

puis :

$$(2n)! \leqslant (u_n)^{2n} e^{u_n} \leqslant \frac{(2n+3)!}{2}.$$

13. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$: $w_n = \dfrac{u_n}{2n}$.

a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \leqslant w_n e^{w_n} \leqslant \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n}.$$

b) En déduire que la suite $(g(w_n))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 0 puis que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers α, la fonction g et le réel α étant définis dans la question (10).

14. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Fin du sujet - Bon courage !