La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies numpy et numpy.random de Python sont importées avec les commandes respectives import numpy as np, et import numpy.random as rd.

Exercice 1 - EDHEC 2026

Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration les formules $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ et $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

On rappelle le développement limité à l'ordre 5 de la fonction sinus au voisinage de 0 donné par :

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

1. Montrer que l'on définit parfaitement deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant $u_1 = 0$, $v_1 = 2$ et, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{v_n}{u_{n+1}}$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n et v_n sont bien définis et $u_n \in [0,1]$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $u_1 = 0 \in [0,1]$ et $v_1 = 2$ qui sont bien définis.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que u_n et v_n sont bien définis avec $u_n \in [0,1]$.

Comme $u_n \in [0,1]$, on a $1 + u_n \in [1,2]$, donc $\dfrac{1+u_n}{2} \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \subset [0, +\infty[$.

Ainsi, $\sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$ est bien défini et appartient à $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right] \subset [0,1]$ par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$.

Donc $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$ est bien défini et appartient à $[0,1]$.

De plus, $u_{n+1} \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$, donc $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{u_{n+1}}$ est bien défini.

Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont bien définies.}}$

2. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie v_n.

```
def suite_v(n):
    u=0
    v=2
    for k in range(2,n+1):
        ...
        ...
    return v
```

> Pas besoin de stocker u avant de le modifier puisqu'on veut u_{n+1} pour calculer v_{n+1}. Donc :
>
> ```
> def suite_v(n):
>     u=0
>     v=2
>     for k in range(2,n+1):
>         u = np.sqrt((1+u)/2)
>         v = v/u
>     return v
> ```

3. a) Montrer qu'il existe une unique suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont les éléments appartiennent à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \cos(\alpha_n)$

> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 1, on a $u_n \in [0, 1]$.
> La fonction cos : $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, 1]$ est continue, strictement décroissante, donc elle établit une bijection entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos(0)\right] = [0, 1]$.
> Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $\alpha_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $u_n = \cos(\alpha_n)$.
> Donc $\boxed{\text{la suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ existe et est unique.}}$

b) Expliciter α_n en fonction de n, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

> Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \frac{\pi}{2^n}$.
> **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a $u_1 = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$, donc $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2^1}$.
> **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\alpha_n = \frac{\pi}{2^n}$.
> On a :
>
> $$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha_n)}{2}}.$$
>
> Or, en utilisant la formule $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$, on obtient $1 + \cos(2a) = 2\cos^2(a)$.
> En posant $2a = \alpha_n$, soit $a = \frac{\alpha_n}{2}$, on obtient :
>
> $$1 + \cos(\alpha_n) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha_n}{2}\right).$$

Donc :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{2\cos^2\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)}{2}} = \left|\cos\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)\right|.$$

Or $\alpha_n = \dfrac{\pi}{2^n} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc $\dfrac{\alpha_n}{2} = \dfrac{\pi}{2^{n+1}} \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right] \subset \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
Ainsi, $\cos\left(\dfrac{\alpha_n}{2}\right) \geq 0$, d'où $u_{n+1} = \cos\left(\dfrac{\alpha_n}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.
Donc $\alpha_{n+1} = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ (par unicité).

Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\alpha_n = \dfrac{\pi}{2^n}.}$

c) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $v_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$ puis donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$.
Initialisation : Pour $n = 1$, on a $v_1 = 2$ et $2^1 \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 1 = 2$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $v_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$.
On a :

$$v_{n+1} = \frac{v_n}{u_{n+1}} = \frac{2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}.$$

Or, avec la formule $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$, en posant $a = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$, on obtient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

Donc :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{2^n \cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \\ &= 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{v_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right).}$

Pour la limite, posons $t_n = \dfrac{\pi}{2^n}$. Lorsque $n \to +\infty$, on a $t_n \to 0^+$.
Or $\sin(t_n) \underset{t_n\to 0}{\sim} t_n$, donc :

$$v_n \sim 2^n \cdot \frac{\pi}{2^n} = \pi.$$

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pi.}$

4. Déterminer les constantes réelles a, b et c telles que :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} a + \frac{b}{4^n} + \frac{c}{4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

Posons $x = \dfrac{\pi}{2^n}$. Lorsque $n \to +\infty$, on a $x \to 0^+$.

On a $v_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) = \dfrac{\sin(x)}{x} \cdot \pi$.

D'après le développement limité donné, on a :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

Donc :

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} v_n &= \pi\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right) \\ &= \pi - \frac{\pi x^2}{6} + \frac{\pi x^4}{120} + o(x^4). \end{aligned}$$

Or $x = \dfrac{\pi}{2^n}$, donc $x^2 = \dfrac{\pi^2}{2^{2n}} = \dfrac{\pi^2}{4^n}$ et $x^4 = \dfrac{\pi^4}{2^{4n}} = \dfrac{\pi^4}{4^{2n}}$.

D'où :

$$\begin{aligned} v_n &= \pi - \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi^2}{4^n} + \frac{\pi}{120} \cdot \frac{\pi^4}{4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right) \\ &= \pi - \frac{\pi^3}{6 \cdot 4^n} + \frac{\pi^5}{120 \cdot 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right). \end{aligned}$$

Par identification : $\boxed{a = \pi, \quad b = -\dfrac{\pi^3}{6}, \quad c = \dfrac{\pi^5}{120}.}$

5. Accélération de convergence par la méthode de Richardson.

   On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{4v_{n+1} - v_n}{3}$.

   a) Écrire en Python une fonction **suite_w** utilisant la fonction **suite_v** et qui renvoie w_n.

Puisqu'on peut utiliser le programme précédent, c'est très simple (comme beaucoup de questions d'info à l'EDHEC) :

```
def suite_w(n):
    v_n = suite_v(n)
    v_n_plus_1 = suite_v(n+1)
    w_n = (4*v_n_plus_1 - v_n)/3
    return w_n
```

   b) Donner la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a :

$$w_n = \frac{4v_{n+1} - v_n}{3}.$$

Lorsque $n \to +\infty$, on a $v_n \to \pi$ et $v_{n+1} \to \pi$.
Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{4\pi - \pi}{3} = \boxed{\pi.}$$

c) Montrer que $w_n \underset{n\to+\infty}{=} \pi - \dfrac{\pi^5}{480 \times 4^{2n}} + o\left(\dfrac{1}{4^{2n}}\right)$, puis déterminer un équivalent de $\dfrac{w_n - \pi}{v_n - \pi}$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

D'après la question 4, on a :

$$v_n = \pi - \frac{\pi^3}{6 \cdot 4^n} + \frac{\pi^5}{120 \cdot 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right).$$

Pour v_{n+1}, on remplace n par $n+1$:

$$v_{n+1} = \pi - \frac{\pi^3}{6 \cdot 4^{n+1}} + \frac{\pi^5}{120 \cdot 4^{2n+2}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right).$$

Calculons $4v_{n+1}$:

$$\begin{aligned} 4v_{n+1} &= 4\pi - \frac{4\pi^3}{6 \cdot 4^{n+1}} + \frac{4\pi^5}{120 \cdot 4^{2n+2}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right) \\ &= 4\pi - \frac{4\pi^3}{6 \cdot 4 \cdot 4^n} + \frac{4\pi^5}{120 \cdot 16 \cdot 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right) \\ &= 4\pi - \frac{\pi^3}{6 \cdot 4^n} + \frac{\pi^5}{480 \cdot 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right). \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 4v_{n+1} - v_n &= 4\pi - \frac{\pi^3}{6 \cdot 4^n} + \frac{\pi^5}{480 \cdot 4^{2n}} - \pi + \frac{\pi^3}{6 \cdot 4^n} - \frac{\pi^5}{120 \cdot 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right) \\ &= 3\pi + \left(\frac{1}{480} - \frac{1}{120}\right)\frac{\pi^5}{4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right) \\ &= 3\pi + \left(\frac{1}{480} - \frac{4}{480}\right)\frac{\pi^5}{4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right) \\ &= 3\pi - \frac{3\pi^5}{480 \cdot 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right). \end{aligned}$$

D'où :

$$w_n = \frac{4v_{n+1} - v_n}{3} = \pi - \frac{\pi^5}{480 \cdot 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right).$$

Pour l'équivalent, on a :

$$v_n - \pi = -\frac{\pi^3}{6 \cdot 4^n} + \frac{\pi^5}{120 \cdot 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\pi^3}{6 \cdot 4^n}.$$

Et :

$$w_n - \pi = -\frac{\pi^5}{480 \cdot 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\pi^5}{480 \cdot 4^{2n}}.$$

Donc :

$$\frac{w_n-\pi}{v_n-\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\frac{\pi^5}{480\cdot 4^{2n}}}{-\frac{\pi^3}{6\cdot 4^n}} = \frac{\pi^5}{480\cdot 4^{2n}}\cdot\frac{6\cdot 4^n}{\pi^3} = \frac{6\pi^2}{480\cdot 4^n} = \boxed{\frac{\pi^2}{80\cdot 4^n}.}$$

d) Dans le cadre de la recherche d'une valeur approchée de π, quel intérêt y a-t-il à utiliser la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ plutôt que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

On a montré que :

$$\frac{w_n-\pi}{v_n-\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{80\cdot 4^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Cela signifie que $|w_n-\pi| \ll |v_n-\pi|$ pour n grand.
En d'autres termes, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers π beaucoup plus rapidement que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Plus précisément, $|v_n-\pi| \sim \frac{\pi^3}{6\cdot 4^n}$ décroît comme $\frac{1}{4^n}$, tandis que $|w_n-\pi| \sim \frac{\pi^5}{480\cdot 4^{2n}}$ décroît comme $\frac{1}{4^{2n}} = \frac{1}{16^n}$, ce qui est beaucoup plus rapide.
Donc $\boxed{\text{la suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge plus rapidement vers } \pi \text{ que } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}}$

6. Généralisation de la méthode de Richardson.
Étant donnés deux réels q et r de $]0,1[$ tels que $q>r$, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$$\exists (a,b,c)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*, \quad x_n \underset{n\to+\infty}{=} a+bq^n+cr^n+o(r^n)$$

a) Définir une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme général est combinaison linéaire de x_n et x_{n+1}, qui vérifie $y_n \underset{n\to+\infty}{=} a+dr^n+o(r^n)$, où d est une constante à déterminer en fonction de c, q et r.

On a :

$$x_n = a+bq^n+cr^n+o(r^n) \quad \text{et} \quad x_{n+1} = a+bq^{n+1}+cr^{n+1}+o(r^{n+1}).$$

Cherchons $y_n = \alpha x_n + \beta x_{n+1}$ avec $\alpha+\beta=1$ (pour que le terme constant soit a) et tel que le coefficient de q^n soit nul.
On a :

$$y_n = \alpha(a+bq^n+cr^n)+\beta(a+bq^{n+1}+cr^{n+1})+o(r^n).$$

Le coefficient de a est $\alpha+\beta=1$.
Le coefficient de bq^n est $\alpha b+\beta bq = b(\alpha+\beta q)$.
Pour annuler ce terme, on veut $\alpha+\beta q=0$, soit $\alpha=-\beta q$.
Avec $\alpha+\beta=1$, on obtient $-\beta q+\beta=1$, soit $\beta(1-q)=1$, donc $\beta=\frac{1}{1-q}$ et $\alpha=\frac{-q}{1-q}$.
Donc :

$$y_n = \frac{-q}{1-q}x_n+\frac{1}{1-q}x_{n+1} = \frac{x_{n+1}-qx_n}{1-q}.$$

Le coefficient de cr^n est :

$$c\left(\frac{-q}{1-q}r^n+\frac{1}{1-q}r^{n+1}\right) = \frac{c}{1-q}r^n(-q+r) = \frac{c(r-q)}{1-q}r^n.$$

Ainsi :

$$y_n = a + \frac{c(r-q)}{1-q} r^n + o(r^n).$$

Donc $\boxed{y_n = \dfrac{x_{n+1} - qx_n}{1-q} \quad \text{avec} \quad d = \dfrac{c(r-q)}{1-q}.}$

b) Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} a + bq^n + o(q^n)$.

On a $x_n = a + bq^n + cr^n + o(r^n)$.
Comme $q > r$ et $0 < r < 1$, on a $r^n = o(q^n)$ lorsque $n \to +\infty$.
En effet, $\dfrac{r^n}{q^n} = \left(\dfrac{r}{q}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ car $0 < \dfrac{r}{q} < 1$.
Donc $cr^n = o(q^n)$ et $o(r^n) = o(q^n)$.
Ainsi : $\boxed{x_n = a + bq^n + o(q^n).}$

c) En déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers a plus rapidement que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

D'après la question précédente, on a :

$$x_n - a = bq^n + o(q^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} bq^n \quad (\text{car } b \neq 0).$$

D'après la question 6.a, on a :

$$y_n - a = dr^n + o(r^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} dr^n \quad (\text{si } d \neq 0).$$

Donc :

$$\frac{y_n - a}{x_n - a} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{dr^n}{bq^n} = \frac{d}{b}\left(\frac{r}{q}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

car $0 < \dfrac{r}{q} < 1$.
Cela signifie que $|y_n - a| \ll |x_n - a|$ pour n grand.
Donc $\boxed{\text{la suite } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } a \text{ plus rapidement que } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}.}$

Exercice 2 - EDHEC 2026 (sauf une question sur les espérances totales)

On suppose que toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie 1

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.
Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : à chaque instant k ($k \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisses $0, 1, \ldots, k$.

Pour tout entier naturel k, on note X_k la variable aléatoire égale à l'abscisse de ce point à l'instant k (on a donc $X_0 = 0$).

On admet que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. a) Déterminer, pour tout entier naturel k non nul, la loi de X_k.

> Soit $k \in \mathbb{N}^*$. À l'instant k, le mobile se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisses $0, 1, \ldots, k$.
> Donc $X_k(\Omega) = [\![0, k]\!]$ et :
>
> $$\forall i \in [\![0, k]\!], \quad \mathbb{P}(X_k = i) = \frac{1}{k+1}.$$
>
> Ainsi, $\boxed{X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, k]\!]).}$

b) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, X_k possède une espérance et une variance, puis calculer $\mathbb{E}(X_k)$ et $\mathbb{V}(X_k)$.

> Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $X_k(\Omega) = [\![0, k]\!]$ est fini, X_k possède une espérance et une variance.
> Pour l'espérance :
>
> $$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_k) &= \sum_{i=0}^{k} i \cdot \mathbb{P}(X_k = i) = \sum_{i=0}^{k} i \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} i \\ &= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \boxed{\frac{k}{2}.}\end{aligned}$$
>
> Pour la variance, calculons d'abord $\mathbb{E}(X_k^2)$ grâce au théorème du transfert (support fini donc tout converge) :
>
> $$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_k^2) &= \sum_{i=0}^{k} i^2 \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} i^2 = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\ &= \frac{k(2k+1)}{6}.\end{aligned}$$
>
> Donc, avec Koenig-Huygens, on a :
>
> $$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_k) &= \mathbb{E}(X_k^2) - [\mathbb{E}(X_k)]^2 = \frac{k(2k+1)}{6} - \frac{k^2}{4} \\ &= \frac{2k(2k+1) - 3k^2}{12} = \frac{4k^2 + 2k - 3k^2}{12} = \frac{k^2 + 2k}{12} \\ &= \boxed{\frac{k(k+2)}{12}.}\end{aligned}$$

2. On note Y la variable aléatoire égale au rang du premier retour à l'origine du mobile (sans prendre en compte son positionnement au départ) et on pose $Y = 0$ s'il n'y a aucun retour à l'origine.

a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'événement $(Y = n)$ à l'aide des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'événement $(Y = n)$ signifie que le premier retour à l'origine se produit à l'instant n.
Cela signifie que : - Le mobile n'est pas à l'origine aux instants $1, 2, \ldots, n-1$: $(X_1 \neq 0) \cap (X_2 \neq 0) \cap \cdots \cap (X_{n-1} \neq 0)$ - Le mobile est à l'origine à l'instant n : $(X_n = 0)$
Donc :

$$\boxed{(Y = n) = (X_1 \neq 0) \cap (X_2 \neq 0) \cap \cdots \cap (X_{n-1} \neq 0) \cap (X_n = 0).}$$

b) En déduire que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme les variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes, on a :

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(X_1 \neq 0) \cdot \mathbb{P}(X_2 \neq 0) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} \neq 0) \cdot \mathbb{P}(X_n = 0).$$

Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, k]\!])$, donc :

$$\mathbb{P}(X_k = 0) = \frac{1}{k+1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_k \neq 0) = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}.$$

De même, $\mathbb{P}(X_n = 0) = \dfrac{1}{n+1}$.
Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = n) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n} \cdot \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \boxed{\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.}
\end{aligned}$$

c) Déterminer par le calcul la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n)$. En déduire $\mathbb{P}(Y = 0)$.

On a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

C'est une série télescopique. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{m=2}^{N+1}\frac{1}{m} \quad \text{(en posant } m=n+1)\\ &= 1-\frac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\to} 1.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=n)=1.}$

Or, on a :

$$\mathbb{P}(Y=0)+\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=n)=1$$

car $Y(\Omega)=\mathbb{N}$ et les événements $(Y=k)$ pour $k\in\mathbb{N}$ forment un système complet d'événements.

Donc : $\mathbb{P}(Y=0)+1=1$, d'où $\boxed{\mathbb{P}(Y=0)=0.}$

d) La variable Y admet-elle une espérance ?

La variable Y admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(Y=n)$ converge absolument.

Comme $\mathbb{P}(Y=n)\geq 0$, il suffit d'étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(Y=n)$.

On a :

$$n\mathbb{P}(Y=n)=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

Or la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}$ diverge (série harmonique, Riemann avec $\alpha\leq 1$).

Donc $\boxed{\text{la variable } Y \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

Partie 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère une variable aléatoire U_n telle que $U_n(\Omega)=[\![0,n-1]\!]$ et qui suit la loi uniforme sur $[\![0,n-1]\!]$.

Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, on considère également une variable aléatoire Z_n dont la loi, conditionnellement à l'événement $(U_n=k)$, est la loi géométrique de paramètre $1-\dfrac{k}{n}$.

3. Simulation informatique de Z_n.
   Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule U_n et Z_n et renvoie la valeur prise par Z_n.

```
def var_Z(n):
    U=-------
    Z=-------
    return Z
```

Pour cette question-ci il vous manquait rd.geometric qui permet de simuler une variable aléatoire suivant une loi géométrique. On verra l'an prochain !

```
def var_Z(n):
    U = rd.randint(0, n)
    Z = rd.geometric(1 - U/n)
    return Z
```

4. a) Montrer que, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on a l'égalité :

$$\mathbb{P}(Z_n = i) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}$$

Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Par formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(U_n = k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$, on a :

$$\mathbb{P}(Z_n = i) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}_{(U_n=k)}(Z_n = i)\cdot\mathbb{P}(U_n = k).$$

Comme $U_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n-1]\!])$, on a $\mathbb{P}(U_n = k) = \dfrac{1}{n}$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.
De plus, conditionnellement à $(U_n = k)$, Z_n suit une loi géométrique de paramètre $p_k = 1 - \dfrac{k}{n}$.
Donc :

$$\mathbb{P}_{(U_n=k)}(Z_n = i) = p_k(1-p_k)^{i-1} = \left(1-\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n}\right)^{i-1}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_n = i) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{n}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{i-1}\\ &= \boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}.}\end{aligned}$$

b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(Z_n = i)$.

Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\mathbb{P}(Z_n = i) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}.$$

Chaque somme est une somme de Riemann. Pour $f : t \mapsto t^{i-1}$ continue sur

$[0,1]$, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 t^{i-1}dt = \left[\frac{t^i}{i}\right]_0^1 = \frac{1}{i}.$$

De même, pour $g : t \mapsto t^i$, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{i} \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 t^i dt = \left[\frac{t^{i+1}}{i+1}\right]_0^1 = \frac{1}{i+1}.$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n = i) = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \boxed{\frac{1}{i(i+1)}.}$$

c) On peut ici, comme dans le cas de la convergence d'une suite de lois binomiales vers une loi de Poisson, dire que Z_n converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n = i) = \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}.$$

Posons $p_i = \dfrac{1}{i(i+1)}$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.
Vérifions que $(p_i)_{i\geq 1}$ définit une loi de probabilité :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = 1$$

(série télescopique, comme vu précédemment).
Donc Z_n converge en loi vers une variable aléatoire Z telle que :

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Z = i) = \frac{1}{i(i+1)}.}$$

On admet le résultat suivant, qu'on pourra montrer l'an prochain avec des résultats sur l'espérance totale :

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

5. Équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
   a) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[k, k+1]$, donc pour tout $t \in [k, k+1]$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

En intégrant sur $[k, k+1]$, par croissance de l'intégrale avec les bornes dans le bon sens, on obtient :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt.$$

D'où :

$$\frac{1}{k+1} \cdot 1 \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \cdot 1.$$

Ainsi : $\boxed{\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}.}$

b) Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'encadrement :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq \mathbb{E}(Z_n) \leq \ln(n) + 1$$

Soit $n \geq 2$. On a $\mathbb{E}(Z_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

D'après l'inégalité précédente, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

Inégalité de droite : En sommant de $k = 1$ à $k = n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} [\ln(k+1) - \ln(k)]$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) - \ln(1) = \ln(n).$$

D'où :

$$\mathbb{E}(Z_n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n).$$

Inégalité de gauche : En sommant de $k = 1$ à $k = n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} [\ln(k+1) - \ln(k)] \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\ln(n) - \ln(1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\ln(n) \leq \mathbb{E}(Z_n) - \frac{1}{n}.$$

D'où :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq \mathbb{E}(Z_n).$$

Ainsi : $\boxed{\ln(n) + \frac{1}{n} \leq \mathbb{E}(Z_n) \leq \ln(n) + 1.}$

c) En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$.

On a montré que :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq \mathbb{E}(Z_n) \leq \ln(n) + 1.$$

Or $\ln(n) + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ car $\frac{1/n}{\ln(n)} = \frac{1}{n\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

De même, $\ln(n) + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ car $\frac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Par le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

Problème - EML 2020

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

PARTIE A : Étude de la suite des racines des polynômes P_n

1. a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les limites de P_n en $+\infty$ et $-\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k x^k}{k!}.$$

Le terme de plus haut degré est $\dfrac{(-1)^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (car $2n+1$ est impair).
Donc :

$$P_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \underset{x\to+\infty}{\to} -\infty$$

car le coefficient dominant est négatif et le degré est impair.
De même :

$$P_n(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \underset{x\to-\infty}{\to} +\infty$$

car $x^{2n+1} \to -\infty$ lorsque $x \to -\infty$.
Ainsi : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} P_n(x) = +\infty.}$

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme P_n admet au moins une racine réelle.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction polynomiale $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
D'après la question précédente, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} P_n(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} P_n(x) = -\infty.$$

Il existe donc $a < 0$ tel que $P_n(a) > 0$ et $b > 0$ tel que $P_n(b) < 0$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]a, b[$ tel que $P_n(c) = 0$.
Donc $\boxed{P_n \text{ admet au moins une racine réelle.}}$

2. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n'(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. P_n est une fonction polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k x^k}{k!}.$$

Donc :

$$P_n'(x) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k k x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k x^{k-1}}{(k-1)!}.$$

En posant $j = k-1$, lorsque k varie de 1 à $2n+1$, j varie de 0 à $2n$:

$$P_n'(x) = \sum_{j=0}^{2n} \frac{(-1)^{j+1} x^j}{j!} = -\sum_{j=0}^{2n} \frac{(-1)^j x^j}{j!}.$$

Or :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{j=0}^{2n} \frac{(-1)^j x^j}{j!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Donc :

$$\sum_{j=0}^{2n} \frac{(-1)^j x^j}{j!} = P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ainsi :

$$P_n'(x) = -\sum_{j=0}^{2n} \frac{(-1)^j x^j}{j!} = \boxed{-P_n(x) - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.}$$

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines de P_n sont toutes simples.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et α une racine de P_n. On a $P_n(\alpha) = 0$.
D'après la question précédente :

$$P_n'(\alpha) = -P_n(\alpha) - \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 - \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Si $\alpha \neq 0$, alors $\alpha^{2n+1} \neq 0$, donc $P_n'(\alpha) \neq 0$.

Si $\alpha = 0$, alors $P_n(0) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{0^k}{k!} = 1 \neq 0$, donc 0 n'est pas racine de P_n.

Ainsi, pour toute racine α de P_n, on a $P_n'(\alpha) \neq 0$, ce qui signifie que α est une racine simple.

Donc $\boxed{\text{toutes les racines de } P_n \text{ sont simples.}}$

3. a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{x}{2k+1}\right).$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x^{2k}}{(2k)!} - \frac{x^{2k+1}}{(2k)!(2k+1)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^{2k}x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{j=0}^{2n+1} \frac{(-1)^{j}x^{j}}{j!} \\
&= \boxed{P_n(x).}
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $(-1)^{2k} = 1$ et $(-1)^{2k+1} = -1$.

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines réelles de P_n appartiennent nécessairement à l'intervalle $[1; 2n+1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et α une racine réelle de P_n. D'après la question précédente :

$$P_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{\alpha}{2k+1}\right) = 0.$$

Cas 1 : Si $\alpha < 1$, alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\alpha < 1 \leq 2k+1$, donc $1 - \dfrac{\alpha}{2k+1} > 0$.
De plus, $\alpha^{2k} \geq 0$ et $\dfrac{1}{(2k)!} > 0$ pour tout k.
Donc tous les termes de la somme sont ≥ 0, et le premier terme (pour $k = 0$) vaut $1 \cdot (1 - \alpha) > 0$ car $\alpha < 1$.
Ainsi $P_n(\alpha) > 0$, ce qui contredit $P_n(\alpha) = 0$.
Donc $\alpha \geq 1$.
Cas 2 : Supposons $\alpha > 2n + 1$.
Alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $2k + 1 \leq 2n + 1 < \alpha$, donc $1 - \dfrac{\alpha}{2k+1} < 0$.
De plus, $\alpha^{2k} > 0$ et $\dfrac{1}{(2k)!} > 0$.
Donc tous les termes $\dfrac{\alpha^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2k+1}\right)$ sont < 0.
Ainsi $P_n(\alpha) < 0$, ce qui contredit $P_n(\alpha) = 0$.
Donc $\alpha \leq 2n + 1$.
Ainsi : $\boxed{1 \leq \alpha \leq 2n+1, \quad \text{soit } \alpha \in [1, 2n+1].}$

4. a) Montrer les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} P'_{n+1}(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}, \\ P''_{n+1}(x) = P_n(x). \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
On utilise la relation de la question 2.a pour $n+1$:

$$P'_{n+1}(x) = -P_{n+1}(x) - \frac{x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} = -P_{n+1}(x) - \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Comme $P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k x^k}{k!} = P_n(x) + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} - \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$, on a :

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(x) &= -\left(P_n(x) + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} - \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\right) - \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \\ &= -P_n(x) - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} - \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \\ &= -P_n(x) - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}. \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{P'_{n+1}(x) = -P_n(x) - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.}$
Pour la deuxième relation, on dérive $P'_{n+1}(x)$:

$$\begin{aligned} P''_{n+1}(x) &= -P'_n(x) - \frac{(2n+2)x^{2n+1}}{(2n+2)!} \\ &= -P'_n(x) - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= -\left[-P_n(x) - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \boxed{P_n(x).} \end{aligned}$$

b) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois, en un réel noté u_n.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : "P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois".
Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$$P_0(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{(-x)^k}{k!} = 1 - x.$$

Donc $P'_0(x) = -1 < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où P_0 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $P_0(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, donc P_0 s'annule une seule fois en $u_0 = 1$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois en u_n.
D'après la question 2.a, on a $P''_{n+1}(x) = P_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Comme P_n est strictement décroissante, on a $P''_{n+1}(x) = P_n(x)$ vérifie :
- $P''_{n+1}(x) > 0$ pour $x < u_n$: P'_{n+1} est strictement croissante sur $]-\infty, u_n[$
- $P''_{n+1}(x) < 0$ pour $x > u_n$: P'_{n+1} est strictement décroissante sur $]u_n, +\infty[$

Donc u_n est le maximum de P'_{n+1} sur $\mathbb{R}$.
Calculons $P'_{n+1}(u_n)$. D'après la question 2.a :

$$P'_{n+1}(u_n) = -P_n(u_n) - \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0 - \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} < 0$$

Comme P'_{n+1} atteint son maximum en u_n et $P'_{n+1}(u_n) < 0$, on a $P'_{n+1}(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc P_{n+1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
D'après la question 1b, P_{n+1} admet au moins une racine réelle. Comme P_{n+1} est strictement décroissante, elle ne peut s'annuler qu'une seule fois.
Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois en u_n.

5. a) Écrire une fonction Python d'en-tête `def factorial(k):` qui renvoie la valeur de $k!$.

Un classique fait 1000 fois en TD

```
def factorial(k):
    produit=1
    for i in range(1, k+1):
        produit = produit * i
    return produit
```

b) Écrire une fonction Python d'en-tête `def P(n, x):` qui prend pour arguments un entier n de $\mathbb{N}$ et un réel x, et qui renvoie la valeur de $P_n(x)$.

```
def P(n, x):
    somme = 0
    for k in range(2*n+2):
        somme = somme + ((-x)**k) / factorial(k)
    return somme
```

c) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant pour argument un entier n de $\mathbb{N}$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
1.  def suite(n):
2.      a = 1
3.      b = 2*n+1
4.      c = (a+b)/2
5.      while b-a > 10**(-3):
6.          if P(n, c) > 0:
7.              a = c
8.          else:
9.              b = c
10.         c = (a+b)/2
11.     return c
```

Explications : - Ligne 2 : $a = 1$ car $u_n \in [1, 2n+1]$ (question 3b) - Ligne 3 :

$b = 2n+1$ car $u_n \in [1, 2n+1]$ - Ligne 5 : condition d'arrêt pour précision 10^{-3} - Lignes 6-9 : comme P_n est décroissante, si $P(n,c) > 0$ alors $u_n > c$ donc on prend $a = c$, sinon $u_n < c$ donc on prend $b = c$ - Ligne 10 : mise à jour de c - Ligne 11 (anciennement 13) : on renvoie c

d) On utilise la fonction précédente pour représenter les premiers termes de la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. Conjecturer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ et la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après le graphique, on observe que $\dfrac{u_n}{n}$ semble converger vers une constante proche de 0.6.
On peut conjecturer que $\dfrac{u_n}{n} \to \alpha$ avec $\alpha \approx 0.6...$
Comme $u_n \sim \alpha n$ avec $\alpha > 0$, on a $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

6. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(u_n) = \dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \dfrac{u_n}{2n+3}\right).$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $P_n(u_n) = 0$ car u_n est la racine de P_n.
Utilisons la formule de la question 3a pour P_{n+1} :

$$P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right).$$

Donc :

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(u_n) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{u_n^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{u_n}{2k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{u_n^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{u_n}{2k+1}\right) + \frac{u_n^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}\left(1 - \frac{u_n}{2(n+1)+1}\right) \\
&= P_n(u_n) + \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \frac{u_n}{2n+3}\right) \\
&= \boxed{\frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \frac{u_n}{2n+3}\right).}
\end{aligned}$$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a montré que :

$$P_{n+1}(u_n) = \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \frac{u_n}{2n+3}\right).$$

D'après la question 3b, $u_n \in [1, 2n+1]$, donc $u_n \geq 1$ et $u_n \leq 2n+1 < 2n+3$.
Ainsi, $1 - \dfrac{u_n}{2n+3} > 1 - 1 = 0$.
De plus, $u_n > 0$ et $(2n+2)! > 0$, donc :

$$P_{n+1}(u_n) > 0.$$

Or P_{n+1} est strictement décroissante (question 4b) et s'annule en u_{n+1}.
Comme $P_{n+1}(u_n) > 0$ et $P_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, et que P_{n+1} est décroissante, on a nécessairement :

$$u_n < u_{n+1}.$$

Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$

7. On suppose **dans cette question** que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ |P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leqslant e^{\ell}|u_n - \ell|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k x^k}{k!}.$$

Donc :

$$P_n'(x) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k k x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k x^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Ainsi :

$$|P_n'(x)| = \left|\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k x^{k-1}}{(k-1)!}\right| \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{|x|^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{2n} \frac{|x|^j}{j!} \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|x|^j}{j!} = e^{|x|}.$$

Comme la suite est croissante, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$. Par l'inégalité des accroissements finis, on a alors :

$$|P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leq \sup_{x\in[u_n,\ell]} |P_n'(x)| \cdot |u_n - \ell| \leq e^{\ell}|u_n - \ell|$$

par croissance de la fonction exponentielle.
On a donc bien :

$$\boxed{|P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leq e^{\ell}|u_n - \ell|.}$$

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(\ell)$. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(u_n) = e^{-\ell}$.

On a :

$$P_n(\ell) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-\ell)^k}{k!}.$$

Lorsque $n \to +\infty$, $2n+1 \to +\infty$, et cette somme partielle converge vers :

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\ell)^k}{k!} = \boxed{e^{-\ell}.}$$

On a montré que $|P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leq e^{\ell}|u_n - \ell|$.
Comme $u_n \to \ell$, on a $|u_n - \ell| \to 0$.
Donc $|P_n(u_n) - P_n(\ell)| \to 0$, soit $P_n(u_n)$ et $P_n(\ell)$ ont la même limite lorsque $n \to +\infty$.
Or $P_n(\ell) \to e^{-\ell}$ d'après ce qu'on vient de montrer.

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n(u_n) = e^{-\ell}.}$

c) Aboutir à une contradiction.

Or, par définition, $P_n(u_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc $\lim_{n\to+\infty} P_n(u_n) = 0$.
Mais on a montré que $\lim_{n\to+\infty} P_n(u_n) = e^{-\ell}$.
Donc $e^{-\ell} = 0$, ce qui est impossible car $e^{-\ell} > 0$ pour tout $\ell \in \mathbb{R}$.
Ainsi, l'hypothèse de convergence de (u_n) est fausse.
Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas convergente.}}$

8. En déduire la nature et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après la question 6b, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
D'après la question 7, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente.
Une suite croissante non convergente diverge nécessairement vers $+\infty$.
Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$

PARTIE B : Quelques résultats intermédiaires

Les deux questions de cette partie sont indépendantes entre elles et indépendantes de la partie A.

9. On note f la fonction définie sur $]0;1]$ par : $\forall t \in]0;1],\ f(t) = -\ln(t)$.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ converge et préciser sa valeur.

La fonction $f : t \mapsto -\ln(t)$ est continue sur $]0,1]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (-\ln(t))dt$ est impropre en 0.
Pour tout $a \in]0,1]$, on a :

$$\int_a^1 (-\ln(t))dt = [-t\ln(t) + t]_a^1 .$$

On a ici utilisé une primitive classique de ln.
Remarque, pas nécessaire sur vos copies : On peut retrouver ce résultatpar intégration par parties avec $u(t) = -\ln(t)$ et $v'(t) = 1$: - u et $v : t \mapsto t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ - $u'(t) = -\dfrac{1}{t}$
Donc :

$$\begin{aligned}\int_a^1 (-\ln(t))dt &= [t\cdot(-\ln(t)) + t]_a^1 \\ &= 0 + a\ln(a) + 1 - a \\ &= a\ln(a) - a + 1.\end{aligned}$$

Quand $a \to 0^+$, on a $a \to 0$ et $a\ln(a) \to 0$ (par croissances comparées).

Donc :

$$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{a\to 0^+} (a\ln(a) - a + 1) = 0 - 0 + 1 = \boxed{1.}$$

L'intégrale converge et vaut 1.

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Justifier, pour tout k de $[\![1; n+1]\!]$: $\quad \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \leqslant \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leqslant \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right).$

En déduire : $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt + \frac{\ln(n)}{n}.$

Commençons par constater que f est décroissante sur $]0,1]$: elle est dérivable sur $]0,1]$ avec $\forall t \in]0,1], f'(t) = -\dfrac{1}{t} < 0$. Soit $n \geq 2$ et $k \in [\![1, n+1]\!]$. Par décroissance de f sur $]0,1]$, pour tout $t \in [\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}]$, on a :

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On intègre cette inégalité sur $[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}]$ (croissance de l'intégrale et bornes dans le bon sens) :

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dt.$$

A gauche et à droite, constante, longueur de l'intervalle $= \dfrac{1}{n}$ donc :

$$\boxed{\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).}$$

On somme maintenant l'inégalité de droite de 1 à $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

En utilisant Chasles et la linéarité de l'intégrale et de la somme, on obtient :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Puisque $f(1) = 0$, on a :

$$\boxed{\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).}$$

On somme désormais l'inégalité de gauche de 1 à $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt.$$

En utilisant Chasles et la linéarité de l'intégrale et de la somme, on obtient :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n}{n}} f(t)dt.$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt.$$

On ajoute $\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ à gauche et à droite :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Finalement, on a $f\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(n)$, donc :

$$\boxed{\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt + \frac{\ln(n)}{n}.}$$

c) En déduire la limite de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On commence par remarquer que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

par linéarité de la somme. Ensuite, c'est un théorème des gendarmes avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt = \int_{0}^{1} f(t)dt = 1$ (question 9a) et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ par croissance comparée. Donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = -1.}$$

d) Montrer finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = e^{-1}$.

Si vous ne vous ête pas trompé dans la question précédente, vous comprenez qu'il faut appliquer l'exponentielle à la limite précédente. On n'oubliera pas

d'utiliser la continuité de l'exponentielle ! On a :

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right) &= \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[\ln(k)-\ln(n)]\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(k)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n)\right)\\ &= \frac{(\prod_{k=1}^{n}k)^{\frac{1}{n}}}{\exp(\ln(n))}\\ &= \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}.\end{aligned}$$

D'après la question précédente, par continuité de l'exponentielle :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^{1/n}}{n}=e^{-1}.}$$

10. On note g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\forall t\in]0;+\infty[,\ g(t)=t+\ln(t)+1$.
Montrer qu'il existe un unique α appartenant à $]0;+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$ et justifier :

$$e^{-2}<\alpha<e^{-1}.$$

La fonction $g : t\mapsto t+\ln(t)+1$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
De plus, g est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec :

$$g'(t)=1+\frac{1}{t}>0$$

pour tout $t>0$, car $t>0$ et $\dfrac{1}{t}>0$.
Donc g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
Calculons les limites :
- Quand $t\to 0^+$: $t\to 0$ et $\ln(t)\to-\infty$, donc $g(t)\to-\infty$.
- Quand $t\to+\infty$: $t\to+\infty$ et $\ln(t)\to+\infty$, donc $g(t)\to+\infty$.
Par le théorème de la bijection, il existe un unique $\alpha\in]0,+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$.
Calculons maintenant $g(e^{-2})$ et $g(e^{-1})$:

$$g(e^{-2})=e^{-2}+\ln(e^{-2})+1=e^{-2}-2+1=e^{-2}-1.$$

Or comme exp est croissante sur $\mathbb{R}$, on a $e^{-2}<e^0=1$, d'où $g(e^{-2})<0$.

$$g(e^{-1})=e^{-1}+\ln(e^{-1})+1=e^{-1}-1+1=e^{-1}>0.$$

Comme g est strictement croissante, $g(e^{-2})<0<g(e^{-1})$, et $g(\alpha)=0$, on a nécessairement :

$$\boxed{e^{-2}<\alpha<e^{-1}.}$$

PARTIE C : Équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

11. a) Montrer : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ e^{-x}=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-x)^k}{k!}-\int_0^x\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}e^{-t}dt.$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On utilise la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction $f : t \to e^{-t}$ (qui est C^{2n+1}) à l'ordre $2n$.
On sait que pour f de classe $\mathcal{C}^{2n+1}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t) dt.$$

Pour $f : t \to e^{-t}$, on a $f^{(k)}(t) = (-1)^k e^{-t}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Donc $f^{(k)}(0) = (-1)^k$ et $f^{(2n+1)}(t) = (-1)^{2n+1} e^{-t} = -e^{-t}$.
Ainsi :

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} (-e^{-t}) dt = \boxed{\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt.}$$

b) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

On va utiliser la croissance de l'intégrale avec les bornes dans le bon sens et des fonctions continues. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$.
Pour $t \in [0, x]$, on a :
- $(x-t)^{2n} \geq 0$ car $x \geq t$ et $2n$ est pair
- $e^{-t} > 0$ car l'exponentielle est strictement positive
- $(2n)! > 0$

Donc $\dfrac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} \geq 0$, d'où :

$$\boxed{\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt \geq 0}$$

Par croissance de l'intégrale avec bornes dans le bon sens.
Pour la majoration, comme $0 \leq t$, on a $e^{-t} \leq 1 = e^0$ (car $t \mapsto e^{-t}$ est décroissante).
Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt &\leq \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \cdot 1\, dt \text{ croissance de l'intégrale avec } x > 0 \\ &= \frac{1}{(2n)!} \int_0^x (x-t)^{2n} dt \text{ linéarité de l'intégrale.} \end{aligned}$$

Une primitive de $t \mapsto (x-t)^{2n}$ est $-\dfrac{(x-t)^{2n+1}}{2n+1}$. Donc :

$$\int_0^x (x-t)^{2n} dt = \left[-\frac{(x-t)^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^x = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Ainsi :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt \leq \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \boxed{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.}$$

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ P_n(x) \leqslant e^{-x} \leqslant P_n(x) + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$.
D'après la question 11a, on a :

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt.$$

Or

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} + \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

la dernière car puissance impaire. Donc :

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} = P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ainsi :

$$e^{-x} = P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt.$$

D'après la question 11b, on a $0 \leq \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et donc en multipliant par -1 :

$$-\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq -\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt \leq 0.$$

Donc :

$$P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq e^{-x} \leq P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0.$$

Soit :

$$\boxed{P_n(x) \leq e^{-x} \leq P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.}$$

12. Soit n un entier de $\mathbb{N}$.

a) Montrer : $P_{n+1}(u_n) \leqslant e^{-u_n} \leqslant \dfrac{(u_n)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique la question 11c avec $x = u_n$ et en remplaçant n par $n+1$:

$$P_{n+1}(u_n) \leq e^{-u_n} \leq P_{n+1}(u_n) + \frac{u_n^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} = P_{n+1}(u_n) + \frac{u_n^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Cela donne l'inégalité de gauche : $P_{n+1}(u_n) \leq e^{-u_n}$.
Pour l'inégalité de droite, on applique la question 11c avec $x = u_n$ (sans changer

n) :

$$P_n(u_n) \leq e^{-u_n} \leq P_n(u_n) + \frac{u_n^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Or $P_n(u_n) = 0$ car u_n est la racine de P_n.
Donc :

$$\boxed{P_{n+1}(u_n) \leq e^{-u_n} \leq \frac{u_n^{2n+1}}{(2n+1)!}.}$$

b) En utilisant le résultat des questions (3)(b) et (6)(a), obtenir :

$$\frac{2(u_n)^{2n}}{(2n+3)!} \leqslant e^{-u_n} \leqslant \frac{(u_n)^{2n}}{(2n)!},$$

puis :

$$(2n)! \leqslant (u_n)^{2n} e^{u_n} \leqslant \frac{(2n+3)!}{2}.$$

D'après la question 6a, on a :

$$P_{n+1}(u_n) = \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \frac{u_n}{2n+3}\right).$$

D'après la question 3b, $u_n \in [1, 2n+1]$, donc $-u_n \geq -(2n+1)$.
Ainsi, $1 - \dfrac{u_n}{2n+3} \geq 1 - \dfrac{2n+1}{2n+3} = \dfrac{2n+3-2n-1}{2n+3} = \dfrac{2}{2n+3} \geq 0$.
D'autre part, $u_n \geq 1$ donc $u_n^{2n+2} \geq u_n^{2n} \geq 0$.
Donc :

$$P_{n+1}(u_n) \geq \frac{u_n^{2n}}{(2n+2)!} \cdot \frac{2}{2n+3} = \boxed{\frac{2u_n^{2n}}{(2n+3)!}}$$

en multipliant les inégalités positives.
Donc, via la question précédente :

$$\boxed{\frac{2u_n^{2n}}{(2n+3)!} \leq e^{-u_n}}.$$

D'autre part, d'après la question précédente :

$$e^{-u_n} \leq \frac{u_n^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{u_n^{2n} u_n}{(2n+1)!} \leq \frac{u_n^{2n}(2n+1)}{(2n+1)!} = \frac{u_n^{2n}}{(2n)!}$$

encore une fois les multiplcations sont par des nombres positifs qui ne changent pas le sens des inégalités. Finalement, on a bien :

$$\boxed{\frac{2u_n^{2n}}{(2n+3)!} \leq e^{-u_n} \leq \frac{u_n^{2n}}{(2n)!}}.$$

Prenons la partie de droite et multiplions par $e^{u_n} \cdot (2n)!$ (positif) :

$$\boxed{(2n)! \leq u_n^{2n} e^{u_n}}.$$

Prenons la partie de gauche et multiplions par $e^{u_n} \cdot \dfrac{(2n+3)!}{2}$ (positif) :

$$\boxed{u_n^{2n} e^{u_n} \leq \frac{(2n+3)!}{2}}.$$

On a donc bien :

$$\boxed{(2n)! \leq u_n^{2n} e^{u_n} \leq \frac{(2n+3)!}{2}}.$$

13. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$: $\quad w_n = \dfrac{u_n}{2n}$.

a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \leqslant w_n e^{w_n} \leqslant \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $w_n = \dfrac{u_n}{2n}$, donc $u_n = 2n \cdot w_n$, d'où $u_n^{2n} = (2n)^{2n} w_n^{2n}$.
D'après la question 12b, on a :

$$(2n)! \leq u_n^{2n} e^{u_n} \leq \frac{(2n+3)!}{2}.$$

En substituant $u_n^{2n} = (2n)^{2n} w_n^{2n}$ et $u_n = 2n w_n$:

$$(2n)! \leq (2n)^{2n} w_n^{2n} (e^{w_n})^{2n} \leq \frac{(2n+3)!}{2}.$$

Soit :

$$(2n)! \leq [(2n) w_n e^{w_n}]^{2n} \leq \frac{(2n+3)!}{2}.$$

En prenant la racine $2n$-ième (on peut le faire car tout est positif, c'est une fonction croissante donc inégalités conservées) :

$$((2n)!)^{\frac{1}{2n}} \leq (2n) w_n e^{w_n} \leq \left(\frac{(2n+3)!}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}.$$

En divisant par $2n$:

$$\frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \leq w_n e^{w_n} \leq \frac{1}{2n}\left(\frac{(2n+3)!}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}.$$

On a ce qu'on voulait à gauche.
A droite, on a $(2n+3)! = (2n+3)(2n+2)(2n+1)(2n)! \leq (2n+3)^3 (2n)!$, donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n}\left(\frac{(2n+3)!}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} &\leq \frac{1}{2n}\left(\frac{(2n+3)^3 (2n)!}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \\ &= \frac{1}{2n}\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} ((2n)!)^{\frac{1}{2n}}.\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\dfrac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \leq w_n e^{w_n} \leq \left(\dfrac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \dfrac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n}.}$

b) En déduire que la suite $(g(w_n))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 0 puis que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers α, la fonction g et le réel α étant définis dans la question (10).

Première chose qu'on a envie de faire en voyant limite avec l'inégalité qu'on vient de montrer c'est les gendarmes. A gauche, on reconnaît le résultat de la question 9d donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n} = e^{-1}.$$

A droite, on regarde le facteur $\left(\dfrac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} = \exp\left(\dfrac{1}{2n}\ln\left(\dfrac{(2n+3)^3}{2}\right)\right)$:

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n}\ln\left(\dfrac{(2n+3)^3}{2}\right) = 0$ par croissances comparées. Don par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} = 1.$

Finalement, par le théorème des gendarmes, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n e^{w_n} = e^{-1}.}$$

Rappelons que $g(t) = t + \ln(t) + 1$ pour $t > 0$, et α est l'unique solution de $g(\alpha) = 0$ dans $]0, +\infty[$.
On a :

$$g(w_n) = w_n + \ln(w_n) + 1 = w_n + \ln\left(\frac{w_n e^{w_n}}{e^{w_n}}\right) + 1 = w_n + \ln(w_n e^{w_n}) - w_n + 1 = \ln(w_n e^{w_n}) + 1.$$

Ici il parait naturel de faire apparaître la quantité sur laquelle on a une limite.
Donc $g(w_n) = \ln(w_n e^{w_n}) + 1 \to -1 + 1 = 0$ par continuité de la fonction logarithme sur $]0, +\infty[$.
Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} g(w_n) = 0.}$
Comme g est continue et strictement croissante (question 10), on a pu appliquer le théorème de la bijection et sa bijection réciproque est continue aussi. Donc $w_n = g^{-1}(g(w_n)) \to g^{-1}(0) = \alpha$ car $g(\alpha) = 0$.
Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \alpha.}$

14. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

On a $w_n = \dfrac{u_n}{2n}$, donc $u_n = 2n \cdot w_n$.
Comme $w_n \to \alpha$ quand $n \to +\infty$, on a :

$$u_n = 2n \cdot w_n \sim 2n \cdot \alpha = 2\alpha n.$$

Donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\alpha n.}$