La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies numpy et numpy.random de Python sont importées avec les commandes respectives import numpy as np, et import numpy.random as rd.

Exercice 1- Edhec 2018 (reprise TD)

La lettre n désigne un entier naturel non nul.
Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une seule solution, notée u_n.
2. a) Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$.
   b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   c) Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$.
   d) Montrer par l'absurde que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut 1.

Exercice 2 – Suites réelles, intégrale sur un segment, étude asymptotique de suites (Reprise DM)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt$.

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Calculer u_0, u_1 et u_2.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1.
   Que peut-on en déduire ?
4. a) Vérifier que $1 - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt$ pour tout entier naturel n, puis établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

   b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. À l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - u_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n) dt.$$

6. Soit x un réel positif. Montrer que $0 \leq \ln(1+x) \leq x$.
7. En déduire que $u_n \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 3 (EDHEC 2020)

Dans tout l'exercice, on désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n ($n \geq 2$), on note Id l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E. Pour tout endomorphisme f de E, on appelle trace de f, le réel, noté $\mathrm{Tr}(f)$, égal à la trace de n'importe laquelle des matrices représentant f.

On admet que l'application trace, ainsi définie, est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Partie 1 : préliminaires

1. On considère un projecteur p de E, c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.
   a) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$
   b) Établir que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(Id - p)$
   c) En déduire que p est diagonalisable et que l'on a :
   $$\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$$

2. Montrer par récurrence sur k ($k \in \mathbb{N}^*$) que, si $E_1, \ldots, E_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E,alors on a l'inégalité :
   $$\dim(E_1 + \cdots + E_k) \leq \dim(E_1) + \ldots + \dim(E_k)$$

Partie 2 : condition nécessaire et suffisante pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur

Soit un entier naturel k supérieur ou égal à 2. On considère des projecteurs de E, notés $p_1, p_2, \ldots, p_k$ et on note $q_k = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$.

3. Montrer que si, pour tout couple (i, j) de $[\![1, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$, alors q_k est un projecteur.

   On suppose dans toute la suite que q_k est un projecteur et on souhaite montrer que, pour tout couple (i, j) de $[\![1, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

4. a) Montrer que $\mathrm{Im}(q_k)$ est inclus dans $\mathrm{Im}(p_1) + \ldots + \mathrm{Im}(p_k)$.
   b) Établir, grâce aux résultats de la partie 1, que $\mathrm{rg}(q_k) = \dim(\mathrm{Im}(p_1) + \ldots + \mathrm{Im}(p_k))$, puis en déduire que $\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Im}(p_1) + \ldots + \mathrm{Im}(p_k)$.
   c) Établir finalement l'égalité
   $$\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}(p_k)$$

5. a) Montrer que, pour tout j de $[\![1, k]\!]$, on a l'égalité $q_k \circ p_j = p_j$.
   b) En déduire que, pour tout j de $[\![1, k]\!]$, on a : $\forall x \in E, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} p_i\left(p_j(x)\right) = 0$.
   c) Montrer alors que, pour tout couple (i, j) de $[\![1, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

6. Conclure quant à l'objectif de cette partie.

Problème - Ecricome 2012 modifié (Reprise CB)

Les deux premières parties sont indépendantes et la troisième utilise certains résultats obtenus dans les deux premières parties.

La partie I est consacrée à l'étude de deux endomorphismes sur $\mathbb{R}_n[x]$.

La partie II consiste à calculer l'espérance et la variance de Z_k ainsi qu'à calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$ sous réserve de convergence.

La partie III fournira la loi de Z_k ainsi que l'étude de la convergence de la série $\sum_{k\geq 0} P(Z_k = r)$.

Partie I : Étude de deux endomorphismes.

Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes à cœfficients réels de degré au plus n.
Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on désigne par e_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par : $e_k = x^k$.
Rappelons que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
Si $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on définit les fonctions $f(P)$ et $g(P)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(P)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad f(P)(1) = P(1),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(P)(x) = (x-1)P'(x) + P(x).$$

1. Prouver que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Calculer $f(g(P))$ puis justifier que $\mathrm{Ker}(g) = \{0\}$.
3. Démontrer que g est un isomorphisme, que $g^{-1} = f$ et que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
4. Écrire la matrice A de f dans la base $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ ainsi que la matrice B de g dans cette même base.
5. Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ on désigne par u_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par : $u_k = (x-1)^k$.

   Prouver que $\mathscr{C} = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
6. Calculer $f(u_r)$ pour $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$. En déduire la matrice A' de f dans la base $\mathscr{C} = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$, ainsi que la matrice B' de g dans cette même base.
7. Justifier que : $\quad \forall s \in \{0, 1, \ldots, n\},\ e_s = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} u_r$

   et que : $\quad \forall r \in \{0, 1, \ldots, n\},\ u_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j.$
8. Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$, puis la matrice de passage Q de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$.
9. Déterminer $(A')^k$, puis calculer $A^k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k(e_n) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k} \right) e_j.$$

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose de $n+1$ urnes notées $U_0, U_1, \ldots, U_n$ et on suppose que pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, l'urne U_i contient $i+1$ boules numérotées $0, 1, \ldots, i$.

On s'intéresse au jeu suivant :

— Au premier tirage, on pioche une boule dans l'urne U_n. Si la boule porte le numéro r alors on repose la boule dans l'urne U_n puis le tirage suivant s'effectue dans l'urne U_r.

— Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, si la boule numéro s a été piochée au k-ième tirage dans une certaine urne, on repose cette boule dans la même urne puis on effectue le $(k+1)$-ième tirage dans l'urne U_s.

Pour tout entier naturel k, on note :

— Z_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule piochée au k-ième tirage.
On convient que $Z_0 = n$.

— F_k le polynéme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)x^r$.

— $E(Z_k)$ l'espérance de la variable aléatoire Z_k.

10. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $Z_k(\Omega)$.
Que dire de la loi de Z_1 ? En déduire l'expression de F_1.

11. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad \mathrm{P}(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^{n} \frac{\mathrm{P}(Z_k = i)}{i+1}.$$

12. Établir les formules suivantes valables pour tous entiers $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$:

$$(\mathcal{R}_1) : \quad (n+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = n) = \mathrm{P}(Z_k = n)$$
$$(\mathcal{R}_2) : \quad (r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = r) - (r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = r+1) = \mathrm{P}(Z_k = r).$$

13. On admet dans cette question que la série $\sum_{k\geq 0} \mathrm{P}(Z_k = r)$ converge pour tout $r \in \{1, \ldots, n\}$ et on pose $S_r = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(Z_k = r)$.
En sommant les relations $(\mathcal{R}_1)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_n.
En sommant les relations $(\mathcal{R}_2)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_{n-1} et montrer que la suite $(rS_r)_{1\leq r\leq n-1}$ est constante.

14. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer la relation :

$$(\mathcal{S}) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$

15. a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Établir que $F'_k(1) = E(Z_k)$ et $F''_k(1) = E(Z_k(Z_k - 1))$.
b) En dérivant une fois puis deux fois la relation $(\mathcal{S})$, donner la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F'_k(1))_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi que la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F''_k(1))_{k\in\mathbb{N}}$.
c) Donner la valeur de $F'_k(1)$ et de $F''_k(1)$ en fonction de k et n.
Expliciter alors la variance $V(Z_k)$ de Z_k en fonction de k et n.

Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires.

On reprend toutes les notations des parties I et II et on pourra admettre tous les résultats établis dans ces deux parties.

Rappelons également qu'à la question II.4 la relation $(\mathcal{S})$ est démontrée ce qui revient à écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g(F_{k+1}) = F_k, \qquad \text{soit encore} \qquad f(F_k) = F_{k+1}.$$

16. Montrer que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}, \ \sum_{j=0}^{n} P(Z_k = j) e_j = F_k = f^k(e_n).$

17. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. À l'aide des résultats obtenus à la partie I, établir que :

$$P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

18. **Application.**

a) Soit $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Déterminer un réel $M_{j,n}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ |P(Z_k = j)| \leq \frac{M_{j,n}}{(j+1)^k}$$

puis justifier que la série $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = j)$ converge lorsque $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

b) Déterminer un réel C_n tel que : $\forall k \in \mathbb{N}, \ |P(Z_k = 0) - 1| \leq \frac{C_n}{2^k}$.

La série $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = 0)$ est-elle convergente ?