La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies numpy et numpy.random de Python sont importées avec les commandes respectives import numpy as np, et import numpy.random as rd.

Exercice 1- Edhec 2018 (reprise TD)

La lettre n désigne un entier naturel non nul.
Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une seule solution, notée u_n.
2. a) Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$.
   b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   c) Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$.
   d) Montrer par l'absurde que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = 1 - x - x^n.$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme fonction polynomiale et sa dérivée est donnée par $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n'(x) = -1 - nx^{n-1}$.
Comme $n \geq 1$ et $x \geq 0$, on obtient $nx^{n-1} \geq 0$, donc

$$f_n'(x) < 0.$$

Ainsi, f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
De plus,

$$f_n(0) = 1 > 0 \quad \text{et} \quad f_n(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0.$$

Par le théorème de la bijection, il existe exactement un réel u_n avec $u_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
Ainsi,

$$\boxed{\exists!\, u_n \in]0, 1[, \quad f_n(u_n) = 0.}$$

2. On étudie maintenant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   a) Tout d'abord, on a déjà montré que $0 < u_n < 1$. Donc $u_n \in]0, 1[$.
   b) Comme u_n est solution de $f_n(x) = 0$, on a

$$1 - u_n - u_n^n = 0,$$

donc

$$1 - u_n = u_n^n.$$

Alors

$$f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1} = u_n^n - u_n^{n+1} = u_n^n(1 - u_n).$$

Or $0 < u_n < 1$, donc $u_n^n > 0$ et $1 - u_n > 0$. Il vient

$$\boxed{f_{n+1}(u_n) > 0.}$$

La fonction f_{n+1} est aussi strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, car

$$f'_{n+1}(x) = -1 - (n+1)x^n < 0.$$

Comme $f_{n+1}(u_n) > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$, la stricte décroissance de f_{n+1} entraîne

$$u_n < u_{n+1}.$$

Donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1, car $0 < u_n < 1$ pour tout n. Par le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ telle que

$$0 \leq \ell \leq 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{\ell \in [0, 1].}$$

d) Il reste à montrer que $\ell = 1$.
Supposons par l'absurde que $\ell < 1$. Alors il existe a tel que $\ell < a < 1$. Comme $u_n \to \ell$, pour n assez grand on a $u_n \leq a$. Donc

$$0 \leq u_n^n \leq a^n.$$

Or $0 < a < 1$, donc $a^n \to 0$. Par le théorème des gendarmes,

$$u_n^n \to 0.$$

Mais, puisque u_n est solution de $f_n(x) = 0$, on a

$$u_n^n = 1 - u_n.$$

En passant à la limite, on obtient

$$0 = \lim_{n\to+\infty} u_n^n = \lim_{n\to+\infty} (1 - u_n) = 1 - \ell,$$

ce qui donne $\ell = 1$, contradiction avec $\ell < 1$.
Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$

Finalement, on a bien obtenu

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante et } \lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$

Exercice 2 – Suites réelles, intégrale sur un segment, étude asymptotique de suites (Reprise DM)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt$.

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Calculer u_0, u_1 et u_2.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1.
   Que peut-on en déduire ?
4. a) Vérifier que $1 - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt$ pour tout entier naturel n, puis établir :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$
   b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. À l'aide d'une intégration par parties, montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - u_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n) dt.$$
6. Soit x un réel positif. Montrer que $0 \leq \ln(1+x) \leq x$.
7. En déduire que $u_n \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction
$$t \longmapsto \frac{1}{1+t^n}$$
est continue sur le segment $[0,1]$ comme quotient de fonctions continues où le dénominateur ne s'annule pas. Donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et l'intégrale
$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\, dt$$
est bien définie pour tout entier naturel n.
Ainsi,
$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie.}}$$

2. On calcule les trois premiers termes.
- Pour $n = 0$:
$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^0}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2}.$$
- Pour $n = 1$:
$$u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2.$$
- Pour $n = 2$:
$$u_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$
Donc
$$\boxed{u_0 = \frac{1}{2}, \qquad u_1 = \ln 2, \qquad u_2 = \frac{\pi}{4}.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $t \in [0,1]$:

$$0 \leq t \leq 1 \implies 0 \leq t^n \leq 1 \quad \text{par croissance de la fonction } x \mapsto x^n \text{ sur } [0,1]$$

Donc

$$0 \leq t^{n+1} \leq t^n$$

par multiplication de la première inégalité par $t^n \geq 0$, ce qui implique

$$\frac{1}{1+t^{n+1}} \geq \frac{1}{1+t^n}.$$

Par croissance de l'intégrale avec bornes dans le bon sens (on a déjà dit fonctions continues), on a alors

$$\boxed{u_{n+1} \geq u_n.}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
De plus, pour tout $t \in [0,1]$, on a $1 \leq 1+t^n$, donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$0 \leq \frac{1}{1+t^n} \leq 1, \tag{1}$$

ce qui donne par croissance de l'intégrale sur $[0,1]$:

$$0 \leq u_n \leq 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante et majorée par 1.}}$$

Par le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ avec

$$0 \leq \ell \leq 1.$$

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 1-u_n &= \int_0^1 1\,dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,dt \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^n}\right) dt \qquad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{1-u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,dt.}$$

On multiplie l'inégalité (1) par $t^n \geq 0$:

$$0 \leq \frac{t^n}{1+t^n} \leq t^n.$$

En intégrant sur $[0,1]$, on obtient (croissance de l'intégrale, bornes dans le bon sens et fonctions continues) :

$$0 \leq 1-u_n \leq \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}.$$

Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{n+1}.}$$

b) Comme $\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, le théorème des gendarmes donne

$$1 - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

soit

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$

5. On va maintenant obtenir le développement asymptotique de u_n.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que

$$\begin{aligned} 1 - u_n &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^n}\right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{nt^{n-1}}{1+t^n} \cdot \frac{t}{n}\, dt. \end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale, on effectue une intégration par parties sur $[0,1]$ en posant

$$u' : t \mapsto \frac{nt^{n-1}}{1+t^n} \quad \text{et} \quad v : t \mapsto \frac{t}{n}.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, avec

$$u : t \mapsto \ln(1+t^n) \quad \text{et} \quad v' : t \mapsto \frac{1}{n}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} 1 - u_n &= \int_0^1 u'(t)v(t)\, dt \\ &= [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)\, dt \\ &= \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\, dt. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{1 - u_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\, dt.}$$

6. Soit $x \geq 0$. On considère la fonction

$$\varphi : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto x - \ln(1+x).$$

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $1 + x \in [1, +\infty[$, donc $\ln(1 + x)$ est bien défini. Ainsi, φ est définie sur $[0, +\infty[$. Elle est dérivable sur cet intervalle comme composée de fonctions dérivables, et, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0.$$

Donc φ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $\varphi(0) = 0$, on en déduit que, pour tout $x \geq 0$,

$$\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$$

c'est-à-dire

$$x - \ln(1 + x) \geq 0$$

donc

$$\ln(1 + x) \leq x.$$

D'autre part, pour tout $x \geq 0$, on a $1 + x \geq 1$. Comme la fonction logarithme est croissante sur $]0, +\infty[$, on obtient

$$\ln(1 + x) \geq \ln(1) = 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{Pour tout } x \geq 0, \quad 0 \leq \ln(1 + x) \leq x.}$$

7. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $t^n \geq 0$, donc en appliquant le résultat de la question précédente avec $x = t^n$,

$$0 \leq \ln(1 + t^n) \leq t^n.$$

Croissance de l'intégrale avec bornes dans le bon sens et fonctions continues sur $[0, 1]$, on obtient

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1 + t^n)\, dt \leq \int_0^1 t^n\, dt = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi,

$$0 \leq \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1 + t^n)\, dt \leq \frac{1}{n(n+1)} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

En utilisant la formule de la question 5, on a

$$u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1 + t^n)\, dt.$$

Il vient donc

$$u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Finalement,

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{=} 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

Exercice 3 (EDHEC 2020)

Dans tout l'exercice, on désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n ($n \geq 2$), on note Id l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E. Pour tout endomorphisme f de E, on appelle trace de f, le réel, noté $\mathrm{Tr}(f)$, égal à la trace de n'importe laquelle des matrices représentant f.

On admet que l'application trace, ainsi définie, est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Partie 1 : préliminaires

1. On considère un projecteur p de E, c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.
   a) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$
   b) Établir que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(Id - p)$
   c) En déduire que p est diagonalisable et que l'on a :
   $$\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$$

2. Montrer par récurrence sur k ($k \in \mathbb{N}^*$) que, si $E_1, \ldots, E_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E,alors on a l'inégalité :
   $$\dim(E_1 + \cdots + E_k) \leq \dim(E_1) + \ldots + \dim(E_k)$$

Partie 2 : condition nécessaire et suffisante pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur

Soit un entier naturel k supérieur ou égal à 2. On considère des projecteurs de E, notés $p_1, p_2, \ldots, p_k$ et on note $q_k = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$.

3. Montrer que si, pour tout couple (i, j) de $[\![1, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$, alors q_k est un projecteur.

   On suppose dans toute la suite que q_k est un projecteur et on souhaite montrer que, pour tout couple (i, j) de $[\![1, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

4. a) Montrer que $\mathrm{Im}(q_k)$ est inclus dans $\mathrm{Im}(p_1) + \ldots + \mathrm{Im}(p_k)$.
   b) Établir, grâce aux résultats de la partie 1, que $\mathrm{rg}(q_k) = \dim(\mathrm{Im}(p_1) + \ldots + \mathrm{Im}(p_k))$, puis en déduire que $\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Im}(p_1) + \ldots + \mathrm{Im}(p_k)$.
   c) Établir finalement l'égalité
   $$\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}(p_k)$$

5. a) Montrer que, pour tout j de $[\![1, k]\!]$, on a l'égalité $q_k \circ p_j = p_j$.
   b) En déduire que, pour tout j de $[\![1, k]\!]$, on a : $\forall x \in E$, $\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} p_i\left(p_j(x)\right) = 0$.
   c) Montrer alors que, pour tout couple (i, j) de $[\![1, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

6. Conclure quant à l'objectif de cette partie.

---

1. a) Soit $x \in E$. On a $x = (x - p(x)) + p(x)$, avec $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et
   $$p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0.$$
   Donc $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$. Si $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$, alors $x = p(y)$ pour un certain $y \in E$, et
   $$x = p(y) = p^2(y) = p(x) = 0.$$

La somme est donc directe :

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p).}$$

On pouvait aussi utiliser le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)) = \dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(p)) + \dim(\mathrm{Im}(p))$$

et donc la somme est directe (somme des dim=dim de la somme).

b) Raisonnons par double inclusion. Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$, et alors

$$x - p(x) = p(y) - p^2(y) = 0,$$

donc $x \in \mathrm{Ker}(Id - p)$. Donc $\boxed{\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(Id - p).}$

Réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}(Id - p)$, alors $x - p(x) = 0$, donc $x = p(x) \in \mathrm{Im}(p)$. Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(Id - p) \subset \mathrm{Im}(p).}$

On a donc bien

$$\boxed{\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(Id - p).}$$

c) **J'ai ommis de retirer cette question, je pensais l'voir retirée mais elle m'a échappée à la relecture.** Les questions précédentes donnent

$$E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(Id - p).$$

Dans une base adaptée à cette somme directe, la matrice de p est

$$\begin{pmatrix} 0_{n-r} & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix}, \qquad r = \dim(\mathrm{Im}(p)).$$

Elle est diagonale, donc p est diagonalisable, et

$$\mathrm{Tr}(p) = r = \dim(\mathrm{Im}(p)) = \mathrm{rg}(p).$$

Par conséquent,

$$\boxed{p \text{ est diagonalisable et } \mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p).}$$

2. On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation.

Pour $k = 1$, on a

$$\dim(E_1) = \sum_{i=1}^{1} \dim(E_i),$$

donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

$$\dim(E_1 + \cdots + E_k) \leq \sum_{i=1}^{k} \dim(E_i).$$

Montrons que

$$\dim(E_1 + \cdots + E_k + E_{k+1}) \leq \sum_{i=1}^{k+1} \dim(E_i).$$

Posons $F = E_1 + \cdots + E_k$. La formule de Grassmann donne

$$\dim(F + E_{k+1}) = \dim(F) + \dim(E_{k+1}) - \dim(F \cap E_{k+1}) \leq \dim(F) + \dim(E_{k+1}).$$

L'hypothèse de récurrence permet donc d'écrire

$$\dim(E_1 + \cdots + E_{k+1}) \leq \sum_{i=1}^{k+1} \dim(E_i).$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion.

Par application du principe de récurrence,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \dim(E_1 + \cdots + E_k) \leq \sum_{i=1}^{k} \dim(E_i).}$$

3. Si $p_i \circ p_j = \theta$ pour $i \neq j$, alors

$$\begin{aligned} q_k^2 &= \left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{k} p_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} p_i^2 + \sum_{i \neq j} p_i \circ p_j = \sum_{i=1}^{k} p_i = \boxed{q_k.} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{q_k \text{ est un projecteur.}}$

4. a) Pour tout $x \in E$, $q_k(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i(x)$ appartient à $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(p_i)$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Im}(q_k) \subset \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(p_i).}$$

b) L'inclusion précédente donne déjà

$$\boxed{\mathrm{rg}(q_k)) \leq \dim\left(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(p_i)\right).}$$

Par linéarité de la trace et la question 1c,

$$\mathrm{rg}(q_k) = \mathrm{Tr}(q_k) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Tr}(p_i) = \sum_{i=1}^{k} \dim(\mathrm{Im}(p_i)).$$

La question 2 donne :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Im}(p_i)\right) \leq \mathrm{rg}(q_k) = \sum_{i=1}^{k}\dim(\mathrm{Im}(p_i)).$$

On a donc :

$$\boxed{\mathrm{rg}(q_k) = \dim\left(\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Im}(p_i)\right).}$$

Puisque $\mathrm{Im}(q_k) \subset \sum_{i=1}^{k}\mathrm{Im}(p_i)$, on obtient :

$$\boxed{\mathrm{Im}(q_k) = \sum_{i=1}^{k}\mathrm{Im}(p_i).}$$

c) La question précédente a montré que $\dim\left(\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Im}(p_i)\right) = \sum_{i=1}^{k}\dim(\mathrm{Im}(p_i))$. Ainsi, le cours donne que la somme des images est directe, et donc

$$\boxed{\mathrm{Im}(q_k) = \bigoplus_{i=1}^{k}\mathrm{Im}(p_i).}$$

5. a) Soit $j \in [\![1, k]\!]$. Comme $p_j(E) \subset \mathrm{Im}(q_k)$ et que q_k est un projecteur, q_k est l'identité sur son image. Donc

$$\boxed{q_k \circ p_j = p_j.}$$

b) En développant cette égalité, pour tout $x \in E$,

$$\sum_{i=1}^{k} p_i(p_j(x)) = p_j(x),$$

soit

$$\forall x \in E, \quad \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} p_i\left(p_j(x)\right) + p_j(x) = p_j(x)$$

donc

$$\boxed{\forall x \in E, \quad \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} p_i\left(p_j(x)\right) = 0.}$$

c) La somme des images étant directe, chaque terme de cette somme nulle appartient à un sous-espace distinct et doit être nul. Ainsi, pour tout $i \neq j$,

$$\forall x \in E, \quad p_i(p_j(x)) = 0,$$

d'où

$$\boxed{p_i \circ p_j = \theta.}$$

6. La question 3 fournit la suffisance, et les questions 4 et 5 la nécessité. Finalement,

$$\boxed{\begin{array}{c} q_k \text{ est un projecteur} \\ \text{si et seulement si} \\ \forall (i,j) \in [\![1,k]\!]^2, \quad i \neq j \implies p_i \circ p_j = \theta. \end{array}}$$

Problème - Ecricome 2012 modifié (Reprise CB)

Les deux premières parties sont indépendantes et la troisième utilise certains résultats obtenus dans les deux premières parties.

La partie I est consacrée à l'étude de deux endomorphismes sur $\mathbb{R}_n[x]$.

La partie II consiste à calculer l'espérance et la variance de Z_k ainsi qu'à calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$ sous réserve de convergence.

La partie III fournira la loi de Z_k ainsi que l'étude de la convergence de la série $\sum_{k\geq 0} P(Z_k = r)$.

Partie I : Étude de deux endomorphismes.

Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes à cœfficients réels de degré au plus n.
Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on désigne par e_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par : $e_k = x^k$.
Rappelons que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
Si $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on définit les fonctions $f(P)$ et $g(P)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(P)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad f(P)(1) = P(1),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(P)(x) = (x-1)P'(x) + P(x).$$

1. Prouver que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(P)(x) = (x-1)P'(x) + P(x).$$

Comme $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on a $\deg(P) \leqslant n$, donc $\deg(P') \leqslant n-1$.
D'où $\deg((x-1)P') \leqslant n$ et $\deg(P) \leqslant n$, donc $\deg(g(P)) \leqslant n$.
Ainsi, $g(P) \in \mathbb{R}_n[x]$, ce qui prouve que $g : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$.
Montrons que g est linéaire. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(P+Q)(x) &= (x-1)(P+Q)'(x) + (P+Q)(x) \\ &= (x-1)(P'(x)+Q'(x)) + P(x) + Q(x) \\ &= (x-1)P'(x) + P(x) + (x-1)Q'(x) + Q(x) \\ &= g(P)(x) + g(Q)(x). \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} g(\lambda P)(x) &= (x-1)(\lambda P)'(x) + (\lambda P)(x) \\ &= (x-1)\lambda P'(x) + \lambda P(x) \\ &= \lambda((x-1)P'(x) + P(x)) \\ &= \lambda g(P)(x). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{g \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[x]}$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Calculer $f(g(P))$ puis justifier que $\mathrm{Ker}(g) = \{0\}$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(P)(x) = (x-1)P'(x) + P(x).$$

Calculons $f(g(P))$ pour $x \neq 1$:

$$\begin{aligned} f(g(P))(x) &= \frac{1}{x-1}\int_1^x g(P)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x-1}\int_1^x [(t-1)P'(t) + P(t)]\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x-1}\left[\int_1^x (t-1)P'(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t\right]. \end{aligned}$$

Pour la première intégrale, effectuons une intégration par parties avec $u : t \mapsto t-1$ et $v : t \mapsto P(t)$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$\int_1^x (t-1)P'(t)\,\mathrm{d}t = [(t-1)P(t)]_1^x - \int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t = (x-1)P(x) - 0 - \int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'où :

$$f(g(P))(x) = \frac{1}{x-1}\left[(x-1)P(x) - \int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{(x-1)P(x)}{x-1} = P(x).$$

Pour $x = 1$, on a par définition :

$$f(g(P))(1) = g(P)(1) = (1-1)P'(1) + P(1) = P(1).$$

Donc $\boxed{f(g(P)) = P}$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$.
En particulier, si $P \in \mathrm{Ker}(g)$, alors $g(P) = 0$, donc :

$$P = f(g(P)) = f(0) = 0.$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(g) = \{0\}}$.

3. Démontrer que g est un isomorphisme, que $g^{-1} = f$ et que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

D'après la question précédente, $\mathrm{Ker}(g) = \{0\}$, donc g est injective.
Or g est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}_n[x]$ (de dimension $n+1$).
Donc g injective $\Rightarrow$ g surjective $\Rightarrow$ g bijective par le théorème du rang.
Ainsi, $\boxed{g \text{ est un isomorphisme}}$.
D'après la question précédente, on a $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[x]}$.
Comme g est bijective, on peut appliquer g^{-1} à droite de l'égalité précédente, ce qui donne :

$$f = f \circ g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[x]} \circ g^{-1}.$$

Ainsi, $\boxed{g^{-1} = f}$.
Comme $f = g^{-1}$ et que g est un endomorphisme,

$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[x]}$.

4. Écrire la matrice A de f dans la base $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ ainsi que la matrice B de g dans cette même base.

Pour calculer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$, calculons $f(e_k)$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f(e_k)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x t^k \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x-1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_1^x = \frac{1}{x-1}\cdot\frac{x^{k+1}-1}{k+1} = \frac{x^{k+1}-1}{(k+1)(x-1)}.$$

Or $x^{k+1}-1 = (x-1)(x^k + x^{k-1} + \cdots + x + 1)$ d'après la formule de Bernoulli, donc :

$$f(e_k)(x) = \frac{x^k + x^{k-1} + \cdots + x + 1}{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} x^j = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} e_j(x).$$

Pour $x = 1$, on a $f(e_k)(1) = e_k(1) = 1 = \dfrac{k+1}{k+1} = \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{k} 1 = \frac{1}{k+1}(k+1)$.

Donc :

$$f(e_k) = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} e_j.$$

Ainsi, dans la base $\mathscr{B}$, la colonne k de A (pour $k \in [\![0, n]\!]$) est : $\begin{pmatrix} \frac{1}{k+1} \\ \frac{1}{k+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (les $k+1$ premiers coefficients valent $\dfrac{1}{k+1}$, les autres sont nuls).

Donc :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}}.$$

Pour la matrice B de g, calculons $g(e_k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(e_k)(x) &= (x-1)ke_k'(x) + e_k(x) \\ &= (x-1)kx^{k-1} + x^k \\ &= kx^{k-1}(x-1) + x^k \\ &= kx^k - kx^{k-1} + x^k \\ &= (k+1)x^k - kx^{k-1}. \end{aligned}$$

Donc :

$$g(e_k) = (k+1)e_k - ke_{k-1} \quad \text{(en convenant que } e_{-1} = 0\text{)}.$$

Ainsi, la colonne k de B dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -k \\ k+1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(coefficient } -k \text{ en ligne } k-1 \text{ si } k \geq 1, \text{ coefficient } k+1 \text{ en ligne } k\text{)}.$$

Donc :

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}}.$$

5. Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ on désigne par u_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par : $u_k = (x-1)^k$.
   Prouver que $\mathscr{C} = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

La famille $\mathscr{C} = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$ est constituée de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$, qui est un espace vectoriel de dimension $n+1$.
Les polynômes $u_k = (x-1)^k$ ont des degrés échelonnés : $\deg(u_k) = k$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
Donc $\mathscr{C}$ est libre, et par conséquent $\boxed{\mathscr{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[x]}$.

6. Calculer $f(u_r)$ pour $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$. En déduire la matrice A' de f dans la base $\mathscr{C} = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$, ainsi que la matrice B' de g dans cette même base.

Soit $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f(u_r)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x (t-1)^r \, \mathrm{d}t = \frac{1}{x-1}\left[\frac{(t-1)^{r+1}}{r+1}\right]_1^x = \frac{1}{x-1}\cdot\frac{(x-1)^{r+1} - 0}{r+1} = \frac{(x-1)^r}{r+1}.$$

Pour $x = 1$, on a $f(u_r)(1) = u_r(1) = 0$.

Donc :

$$\boxed{f(u_r) = \frac{1}{r+1} u_r}.$$

Ainsi, dans la base $\mathscr{C}$, la matrice A' de f est diagonale :

$$\boxed{A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}}.$$

Comme $g = f^{-1}$, la matrice B' de g dans la base $\mathscr{C}$ est l'inverse de A', donc :

$$\boxed{B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n+1 \end{pmatrix}}.$$

7. Justifier que : $\quad \forall s \in \{0, 1, \ldots, n\},\ e_s = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} u_r$

et que : $\quad \forall r \in \{0, 1, \ldots, n\},\ u_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j.$

Pour tout $s \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on a :

$$e_s(x) = x^s = (1 + (x-1))^s.$$

Par la formule du binôme de Newton :

$$(1 + (x-1))^s = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} 1^{s-r} (x-1)^r = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} (x-1)^r = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} u_r(x).$$

Donc $\boxed{e_s = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} u_r}$.

De même, pour tout $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on a :

$$u_r(x) = (x-1)^r = ((x) + (-1))^r.$$

Par la formule du binôme de Newton :

$$((x) + (-1))^r = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} x^j (-1)^{r-j} = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} x^j = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j(x).$$

Donc $\boxed{u_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j}$.

8. Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$, puis la matrice de passage Q de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$.

La matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ est la matrice dont la colonne r contient les coordonnées de u_r dans la base $\mathscr{B}$.
D'après la question précédente, on a :

$$u_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j.$$

Donc la colonne r de P (pour $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$) est :

$$\begin{pmatrix} (-1)^r \binom{r}{0} \\ (-1)^{r-1} \binom{r}{1} \\ \vdots \\ (-1)^0 \binom{r}{r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & 3 & \cdots & (-1)^{n-1} n \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \cdots & (-1)^{n-2} \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}.$$

La matrice de passage Q de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$ est la matrice dont la colonne s contient les coordonnées de e_s dans la base $\mathscr{C}$.
D'après la question précédente, on a :

$$e_s = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} u_r.$$

Donc la colonne s de Q (pour $s \in \{0, 1, \ldots, n\}$) est :

$$\begin{pmatrix} \binom{s}{0} \\ \binom{s}{1} \\ \vdots \\ \binom{s}{s} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0} & \binom{4}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \binom{3}{3} & \binom{4}{3} & \cdots & \binom{n}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \binom{4}{4} & \cdots & \binom{n}{4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}}.$$

9. Déterminer $(A')^k$, puis calculer $A^k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k(e_n) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k} \right) e_j.$$

D'après la question 6, A' est diagonale avec les valeurs diagonales $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n+1}$.

Donc :

$$\boxed{(A')^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(n+1)^k} \end{pmatrix}}.$$

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $A^k = Q(A')^k P$.

Initialisation : Pour $k = 0$, on a $A^0 = I_{n+1}$ et $(A')^0 = I_{n+1}$.

Donc $Q(A')^0P = QI_{n+1}P = QP = I_{n+1}$ car d'après la question 8, P et Q sont inverses l'une de l'autre.
Donc $A^0 = Q(A')^0P$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^k = Q(A')^kP$.
Montrons que $A^{k+1} = Q(A')^{k+1}P$.
On a :

$$\begin{aligned}
A^{k+1} &= A \cdot A^k \\
&= A \cdot Q(A')^kP \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= QA'P \cdot Q(A')^kP \quad (\text{car } A = QA'P) \\
&= QA'(PQ)(A')^kP \\
&= QA'I_{n+1}(A')^kP \quad (\text{car } PQ = I_{n+1}) \\
&= QA'(A')^kP \\
&= Q(A')^{k+1}P.
\end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.
Conclusion : Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{A^k = Q(A')^kP}$.

Calculons $A^k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui représente les coordonnées de $f^k(e_n)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est la dernière colonne de l'identité donc $P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est la dernière colonne de P, qui est :

$$\begin{pmatrix} (-1)^n\binom{n}{0} \\ (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \\ \vdots \\ (-1)^0\binom{n}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ (-1)^{n-1}n \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$(A')^kP \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \cdot 1 \\ (-1)^{n-1}n \cdot \dfrac{1}{2^k} \\ \vdots \\ 1 \cdot \dfrac{1}{(n+1)^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^n\binom{n}{0}}{1^k} \\ \dfrac{(-1)^{n-1}\binom{n}{1}}{2^k} \\ \vdots \\ \dfrac{(-1)^0\binom{n}{n}}{(n+1)^k} \end{pmatrix}.$$

Donc le coefficient de la ligne r est $\dfrac{(-1)^{n-r}\binom{n}{r}}{(r+1)^k}$.

Maintenant, calculons $Q[(A')^k P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$.

Le coefficient de la ligne j de ce vecteur est :

$$\sum_{r=0}^{n} Q_{j,r} \cdot \frac{(-1)^{n-r}\binom{n}{r}}{(r+1)^k}.$$

Or la ligne j de Q commence par j zéros, puis contient les coefficients $\binom{r}{j}$ pour $r \geq j$.
Donc :

$$(\text{ligne } j \text{ de } A^k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \sum_{r=j}^{n} \binom{r}{j} \cdot \frac{(-1)^{n-r}\binom{n}{r}}{(r+1)^k}.$$

On constate ici une légère erreur d'énoncé : l'énoncé dit $(-1)^{r-j}$, alors que nous avons $(-1)^{n-r}$. Je ne vois pas comment obtenir la version demandée.
Donc :

$$\boxed{f^k(e_n) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{r=j}^{n} (-1)^{n-r} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k} \right) e_j}$$

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose de $n+1$ urnes notées $U_0, U_1, \ldots, U_n$ et on suppose que pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, l'urne U_i contient $i+1$ boules numérotées $0, 1, \ldots, i$.

On s'intéresse au jeu suivant :

— Au premier tirage, on pioche une boule dans l'urne U_n. Si la boule porte le numéro r alors on repose la boule dans l'urne U_n puis le tirage suivant s'effectue dans l'urne U_r.

— Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, si la boule numéro s a été piochée au k-ième tirage dans une certaine urne, on repose cette boule dans la même urne puis on effectue le $(k+1)$-ième tirage dans l'urne U_s.

Pour tout entier naturel k, on note :

— Z_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule piochée au k-ième tirage.
On convient que $Z_0 = n$.

— F_k le polynéme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r) x^r$.

— $E(Z_k)$ l'espérance de la variable aléatoire Z_k.

10. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $Z_k(\Omega)$.
Que dire de la loi de Z_1 ? En déduire l'expression de F_1.

On a déjà vu que $Z_0 = n$ par convention, donc $Z_0(\Omega) = \{n\}$.
Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $Z_k(\Omega) = [\![0; n]\!]$.
Initialisation : Pour $k = 1$, le premier tirage s'effectue dans l'urne U_n qui contient $n+1$ boules numérotées de 0 à n.

Donc $Z_1(\Omega) = [\![0; n]\!]$.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $Z_k(\Omega) = [\![0; n]\!]$.
Montrons que $Z_{k+1}(\Omega) = [\![0; n]\!]$ par double inclusion.
Inclusion $\subset$: Puisque le tirage $k+1$ s'effectue dans une urne U_i pour un certain $i \in [\![0; n]\!]$, alors Z_{k+1} ne peut prendre que des valeurs dans $[\![0; i]\!]$, qui est lui-même inclus dans $[\![0; n]\!]$.
Inclusion $\supset$: Soit $r \in [\![0; n]\!]$.
Par hypothèse de récurrence, $n \in Z_k(\Omega)$ (car $Z_k(\Omega) = [\![0; n]\!]$).
Il existe donc un événement $\omega \in \Omega$ tel que $Z_k(\omega) = n$, et dans ce cas, au $(k+1)$-ième tirage, on tire dans l'urne U_n qui contient toutes les boules numérotées de 0 à n.
En particulier, il est possible d'obtenir $Z_{k+1} = r$.
Donc $r \in Z_{k+1}(\Omega)$, d'où $[\![0; n]\!] \subset Z_{k+1}(\Omega)$.
Conclusion : Par double inclusion, $Z_{k+1}(\Omega) = [\![0; n]\!]$.

Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{Z_k(\Omega) = [\![0; n]\!].}$ Pour Z_1, on tire au premier tirage dans l'urne U_n qui contient $n+1$ boules numérotées de 0 à n, toutes équiprobables.
Donc $\boxed{Z_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0; n]\!])}$ (loi uniforme sur $[\![0; n]\!]$).
Ainsi, pour tout $r \in [\![0; n]\!]$:

$$\mathrm{P}(Z_1 = r) = \frac{1}{n+1}.$$

Donc :

$$\boxed{F_1(x) = \sum_{r=0}^{n} \mathrm{P}(Z_1 = r)x^r = \sum_{r=0}^{n} \frac{x^r}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{r=0}^{n} x^r = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}}$$

pour $x \neq 1$, et $F_1(1) = 1$.

11. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad \mathrm{P}(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^{n} \frac{\mathrm{P}(Z_k = i)}{i+1}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0; n]\!]$.
Les événements $(Z_k = i)$ pour $i \in [\![0; n]\!]$ forment un système complet d'événements.
Donc par la formule des probabilités totales :

$$\mathrm{P}(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = r) \cdot \mathrm{P}(Z_k = i).$$

Calculons $\mathrm{P}_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = r)$.
Sachant que $Z_k = i$, le tirage $k+1$ s'effectue dans l'urne U_i qui contient $i+1$ boules numérotées de 0 à i.
Donc :

- Si $r \leqslant i$, alors la boule numéro r est présente dans U_i, et $\mathrm{P}_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = r) = \dfrac{1}{i+1}$.
- Si $r > i$, alors la boule numéro r n'est pas présente dans U_i, et $\mathrm{P}_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = r) = 0$.

Donc :

$$\mathrm{P}(Z_{k+1}=r)=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{P}_{(Z_k=i)}(Z_{k+1}=r)\cdot\mathrm{P}(Z_k=i)=\sum_{i=r}^{n}\frac{\mathrm{P}(Z_k=i)}{i+1}.$$

D'où : $\boxed{\mathrm{P}(Z_{k+1}=r)=\sum_{i=r}^{n}\frac{\mathrm{P}(Z_k=i)}{i+1}}$.

12. Établir les formules suivantes valables pour tous entiers $k\in\mathbb{N}$ et $r\in\{0,1,\dots,n-1\}$:

$$(\mathcal{R}_1):\quad (n+1)\mathrm{P}(Z_{k+1}=n)=\mathrm{P}(Z_k=n)$$
$$(\mathcal{R}_2):\quad (r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1}=r)-(r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1}=r+1)=\mathrm{P}(Z_k=r).$$

Soit $k\in\mathbb{N}$.
Pour $(\mathcal{R}_1)$:
D'après la question précédente, avec $r=n$:

$$\mathrm{P}(Z_{k+1}=n)=\sum_{i=n}^{n}\frac{\mathrm{P}(Z_k=i)}{i+1}=\frac{\mathrm{P}(Z_k=n)}{n+1}.$$

D'où : $\boxed{(n+1)\mathrm{P}(Z_{k+1}=n)=\mathrm{P}(Z_k=n)}$.
Pour $(\mathcal{R}_2)$:
Soit $r\in[\![0;n-1]\!]$.
D'après la question précédente :

$$\mathrm{P}(Z_{k+1}=r)=\sum_{i=r}^{n}\frac{\mathrm{P}(Z_k=i)}{i+1}$$
$$\mathrm{P}(Z_{k+1}=r+1)=\sum_{i=r+1}^{n}\frac{\mathrm{P}(Z_k=i)}{i+1}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&(r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1}=r)-(r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1}=r+1)\\
&=(r+1)\sum_{i=r}^{n}\frac{\mathrm{P}(Z_k=i)}{i+1}-(r+1)\sum_{i=r+1}^{n}\frac{\mathrm{P}(Z_k=i)}{i+1}\\
&=(r+1)\left[\frac{\mathrm{P}(Z_k=r)}{r+1}+\sum_{i=r+1}^{n}\frac{\mathrm{P}(Z_k=i)}{i+1}-\sum_{i=r+1}^{n}\frac{\mathrm{P}(Z_k=i)}{i+1}\right]\\
&=(r+1)\cdot\frac{\mathrm{P}(Z_k=r)}{r+1}\\
&=\mathrm{P}(Z_k=r).
\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{(r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1}=r)-(r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1}=r+1)=\mathrm{P}(Z_k=r)}$.

13. On admet dans cette question que la série $\sum_{k\geq 0} \mathrm{P}(Z_k = r)$ converge pour tout $r \in \{1, \ldots, n\}$ et on pose $S_r = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(Z_k = r)$.
En sommant les relations $(\mathcal{R}_1)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_n.
En sommant les relations $(\mathcal{R}_2)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_{n-1} et montrer que la suite $(rS_r)_{1\leq r\leq n-1}$ est constante.

En sommant la relation $(\mathcal{R}_1)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(n+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(Z_k = n).$$

Soit :

$$(n+1)\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{P}(Z_k = n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(Z_k = n).$$

D'où :

$$(n+1)(S_n - \mathrm{P}(Z_0 = n)) = S_n.$$

Or $Z_0 = n$ par convention, donc $\mathrm{P}(Z_0 = n) = 1$.
Ainsi :

$$(n+1)S_n - (n+1) = S_n \quad \Rightarrow \quad nS_n = n+1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_n = \frac{n+1}{n}}.$$

En sommant la relation $(\mathcal{R}_2)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, pour $r \in [\![0; n-1]\!]$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}[(r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = r) - (r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = r+1)] = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(Z_k = r).$$

Soit :

$$(r+1)\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{P}(Z_k = r) - (r+1)\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{P}(Z_k = r+1) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(Z_k = r).$$

D'où :

$$(r+1)(S_r - \mathrm{P}(Z_0 = r)) - (r+1)(S_{r+1} - \mathrm{P}(Z_0 = r+1)) = S_r.$$

Or $\mathrm{P}(Z_0 = r) = 1$ si $r = n$ et 0 sinon.
Pour $r \in [\![0; n-1]\!]$, on a $\mathrm{P}(Z_0 = r) = 0$ et $\mathrm{P}(Z_0 = r+1) = 0$ (sauf si $r+1 = n$).
Pour $r = n-1$:

$$(n)(S_{n-1} - 0) - n(S_n - 1) = S_{n-1}.$$

$$(n)S_{n-1} - nS_n + n = S_{n-1}.$$

$$(n-1)S_{n-1} = nS_n - n = n \cdot \frac{n+1}{n} - n = n+1-n = 1.$$

Donc : $\boxed{S_{n-1} = \frac{1}{n-1}}$.

Pour $r \in [\![1; n-2]\!]$:

$$(r+1)S_r - (r+1)S_{r+1} = S_r \quad \Rightarrow \quad rS_r = (r+1)S_{r+1}.$$

Donc pour tout $r \in [\![1; n-2]\!]$, on a $rS_r = (r+1)S_{r+1}$.
Cela signifie que la suite $(rS_r)_{1 \leqslant r \leqslant n-1}$ est constante, avec :

$$\boxed{rS_r = (n-1)S_{n-1} = 1 \quad \text{pour tout } r \in [\![1; n-1]\!]}.$$

14. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer la relation :

$$(\mathcal{S}) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \ (x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
On a :

$$F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} \mathrm{P}(Z_k = r)x^r \quad \text{et} \quad F_{k+1}(x) = \sum_{r=0}^{n} \mathrm{P}(Z_{k+1} = r)x^r.$$

Donc :

$$F'_{k+1}(x) = \sum_{r=1}^{n} \mathrm{P}(Z_{k+1} = r) \cdot rx^{r-1} = \sum_{r=1}^{n} r \cdot \mathrm{P}(Z_{k+1} = r)x^{r-1}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&(x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) \\
&= \sum_{r=1}^{n} r \cdot \mathrm{P}(Z_{k+1} = r)x^r - \sum_{r=1}^{n} r \cdot \mathrm{P}(Z_{k+1} = r)x^{r-1} + \sum_{r=0}^{n} \mathrm{P}(Z_{k+1} = r)x^r \\
&= \sum_{r=1}^{n} [r \cdot \mathrm{P}(Z_{k+1} = r) + \mathrm{P}(Z_{k+1} = r)]x^r + \mathrm{P}(Z_{k+1} = 0)x^0 - \sum_{r=1}^{n} r \cdot \mathrm{P}(Z_{k+1} = r)x^{r-1} \\
&= \sum_{r=1}^{n} (r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = r)x^r + \mathrm{P}(Z_{k+1} = 0) - \sum_{r=1}^{n} r \cdot \mathrm{P}(Z_{k+1} = r)x^{r-1} \\
&= \sum_{r=0}^{n} (r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = r)x^r - \sum_{s=0}^{n-1} (s+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = s+1)x^s \quad (s = r-1 \text{ et terme rentré}) \\
&= \sum_{r=0}^{n} (r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = r)x^r - \sum_{r=0}^{n-1} (r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = r+1)x^r \\
&= \sum_{r=0}^{n-1} (r+1)[\mathrm{P}(Z_{k+1} = r) - \mathrm{P}(Z_{k+1} = r+1)]x^r + (n+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = n)x^n.
\end{aligned}$$

D'après la question 12, on a :
— Pour $r \in [\![0; n-1]\!]$: $(r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = r) - (r+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = r+1) = \mathrm{P}(Z_k = r)$.
— Pour $r = n$: $(n+1)\mathrm{P}(Z_{k+1} = n) = \mathrm{P}(Z_k = n)$.
Donc :

$$\begin{aligned}
(x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) &= \sum_{r=0}^{n} \mathrm{P}(Z_k = r)x^r \\
&= F_k(x).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x)}$.

15. a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Établir que $F'_k(1) = E(Z_k)$ et $F''_k(1) = E(Z_k(Z_k-1))$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} \mathrm{P}(Z_k = r)x^r.$$

Donc :

$$F'_k(x) = \sum_{r=0}^{n} r \cdot \mathrm{P}(Z_k = r)x^{r-1} = \sum_{r=1}^{n} r \cdot \mathrm{P}(Z_k = r)x^{r-1}.$$

D'où :

$$F'_k(1) = \sum_{r=1}^{n} r \cdot \mathrm{P}(Z_k = r) = \sum_{r=0}^{n} r \cdot \mathrm{P}(Z_k = r) = \boxed{\mathrm{E}(Z_k)}.$$

De plus :

$$F''_k(x) = \sum_{r=1}^{n} r(r-1) \cdot \mathrm{P}(Z_k = r)x^{r-2} = \sum_{r=2}^{n} r(r-1) \cdot \mathrm{P}(Z_k = r)x^{r-2}.$$

D'où :

$$F''_k(1) = \sum_{r=2}^{n} r(r-1) \cdot \mathrm{P}(Z_k = r) = \sum_{r=0}^{n} r(r-1) \cdot \mathrm{P}(Z_k = r) = \boxed{\mathrm{E}(Z_k(Z_k-1)).}$$

On a utilise le théorème de transfert (sans problème car les sommes sont finies).

b) En dérivant une fois puis deux fois la relation $(\mathcal{S})$, donner la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F'_k(1))_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi que la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F''_k(1))_{k\in\mathbb{N}}$.

D'après la relation $(\mathcal{S})$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$

Dérivons cette relation une fois (les fonctions sont polynomiales, donc dérivables autant de fois que l'on veut) :

$$F'_{k+1}(x) + (x-1)F''_{k+1}(x) + F'_{k+1}(x) = F'_k(x).$$

Soit :

$$2F'_{k+1}(x) + (x-1)F''_{k+1}(x) = F'_k(x).$$

En évaluant en $x = 1$:

$$\boxed{2F'_{k+1}(1) = F'_k(1)}.$$

Dérivons la relation $2F'_{k+1}(x) + (x-1)F''_{k+1}(x) = F'_k(x)$ une deuxième fois :

$$2F''_{k+1}(x) + F''_{k+1}(x) + (x-1)F'''_{k+1}(x) = F''_k(x).$$

Soit :

$$3F''_{k+1}(x) + (x-1)F'''_{k+1}(x) = F''_k(x).$$

En évaluant en $x = 1$:

$$\boxed{3F''_{k+1}(1) = F''_k(1)}.$$

c) Donner la valeur de $F'_k(1)$ et de $F''_k(1)$ en fonction de k et n.
Expliciter alors la variance $V(Z_k)$ de Z_k en fonction de k et n.

D'après la question précédente, on a $2F'_{k+1}(1) = F'_k(1)$, donc :

$$F'_{k+1}(1) = \frac{F'_k(1)}{2}.$$

Par récurrence, on obtient :

$$F'_k(1) = \frac{F'_0(1)}{2^k}.$$

Or $F_0(x) = x^n$ (car $Z_0 = n$ avec probabilité 1), donc $F'_0(x) = nx^{n-1}$ et $F'_0(1) = n$.
Ainsi :

$$\boxed{F'_k(1) = \frac{n}{2^k}}.$$

De même, $3F''_{k+1}(1) = F''_k(1)$, donc :

$$F''_{k+1}(1) = \frac{F''_k(1)}{3}.$$

Par récurrence :

$$F''_k(1) = \frac{F''_0(1)}{3^k}.$$

Or $F_0(x) = x^n$, donc $F''_0(x) = n(n-1)x^{n-2}$ et $F''_0(1) = n(n-1)$.
Ainsi :

$$\boxed{F''_k(1) = \frac{n(n-1)}{3^k}}.$$

D'après la question 15.a), on a :

$$\mathrm{E}(Z_k) = F'_k(1) = \frac{n}{2^k} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}(Z_k(Z_k-1)) = F''_k(1) = \frac{n(n-1)}{3^k}.$$

Or :

$$\mathrm{E}(Z_k^2) = \mathrm{E}(Z_k(Z_k-1)) + \mathrm{E}(Z_k) = \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k}.$$

On a utilsié la linéarité de l'espérance et le fait que $Z_k^2 = Z_k(Z_k-1) + Z_k$.
Donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(Z_k) &= \mathrm{E}(Z_k^2) - [\mathrm{E}(Z_k)]^2 \text{ (Koenig-Huygens)} \\
&= \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \left(\frac{n}{2^k}\right)^2 \\
&= \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \frac{n^2}{4^k} \\
&= \boxed{\frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \frac{n^2}{2^{2k}}}.
\end{aligned}$$

Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires.

On reprend toutes les notations des parties I et II et on pourra admettre tous les résultats établis dans ces deux parties.

Rappelons également qu'à la question II.4 la relation $(\mathcal{S})$ est démontrée ce qui revient à écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g(F_{k+1}) = F_k, \quad \text{soit encore} \quad f(F_k) = F_{k+1}.$$

16. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^{n} P(Z_k = j)e_j = F_k = f^k(e_n)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.
Par définition, on a :

$$F_k(x) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(Z_k = j)x^j = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(Z_k = j)e_j(x).$$

Donc le polynôme F_k s'écrit :

$$F_k = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(Z_k = j)e_j.$$

D'après la relation $(\mathcal{S})$ de la question 14, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$

Cela signifie que $g(F_{k+1}) = F_k$, où g est l'endomorphisme de la Partie I.
Or d'après la Partie I, $g = f^{-1}$, donc $F_{k+1} = f(F_k)$.
Par récurrence sur k :

- Pour $k = 0$: $F_0(x) = x^n = e_n(x)$, donc $F_0 = e_n = f^0(e_n)$.
- Pour $k \geq 1$: si $F_k = f^k(e_n)$, alors $F_{k+1} = f(F_k) = f(f^k(e_n)) = f^{k+1}(e_n)$.

Donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(Z_k = j)e_j = F_k = f^k(e_n)}$.

17. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. À l'aide des résultats obtenus à la partie I, établir que :

$$P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
D'après la question précédente, on a :

$$F_k = f^k(e_n) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(Z_k = j)e_j.$$

D'après la question 9 de la Partie I, on a :

$$f^k(e_n) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k} \right) e_j.$$

Par unicité de la décomposition dans la base $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$, on identifie les coefficients :

$$\boxed{\mathrm{P}(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}}.$$

18. **Application.**

a) Soit $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Déterminer un réel $M_{j,n}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |P(Z_k = j)| \leq \frac{M_{j,n}}{(j+1)^k}$$

puis justifier que la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} P(Z_k = j)$ converge lorsque $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Soit $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ et $k \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente :

$$\mathrm{P}(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

Donc :

$$|\mathrm{P}(Z_k = j)| \leqslant \sum_{r=j}^{n} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

Or pour tout $r \geqslant j$, on a $(r+1) \geqslant (j+1)$, donc $(r+1)^k \geqslant (j+1)^k$ (car la fonction $t \mapsto t^k$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$).
Donc :

$$\frac{1}{(r+1)^k} \leqslant \frac{1}{(j+1)^k}.$$

D'où :

$$|\mathrm{P}(Z_k = j)| \leqslant \sum_{r=j}^{n} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(j+1)^k} = \frac{1}{(j+1)^k} \sum_{r=j}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{j}.$$

Posons :

$$M_{j,n} = \sum_{r=j}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{j}.$$

Alors $\boxed{|\mathrm{P}(Z_k = j)| \leqslant \frac{M_{j,n}}{(j+1)^k}}$.
Pour $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a $j + 1 \geqslant 2$, donc $(j+1)^k \geqslant 2^k$.
Ainsi :

$$|\mathrm{P}(Z_k = j)| \leqslant \frac{M_{j,n}}{2^k}.$$

La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{M_{j,n}}{2^k}$ est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}<1$, donc elle converge.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}|\mathrm{P}(Z_k=j)|$ converge.

Donc $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\mathrm{P}(Z_k=j) \text{ converge absolument (donc converge) pour } j\in\{1,2,\dots,n\}}$.

b) Déterminer un réel C_n tel que : $\forall k\in\mathbb{N},\ |P(Z_k=0)-1|\leq\dfrac{C_n}{2^k}$.

La série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}P(Z_k=0)$ est-elle convergente ?

Pour $j=0$ et $k\in\mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{P}(Z_k=0)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{\binom{n}{r}\binom{r}{0}}{(r+1)^k}=\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r\binom{n}{r}}{(r+1)^k}$$

car $\displaystyle\binom{r}{0}=1$ pour tout r.

On a :

$$\mathrm{P}(Z_k=0)-1=\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r\binom{n}{r}}{(r+1)^k}-1=\frac{(-1)^0\binom{n}{0}}{1^k}+\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^r\binom{n}{r}}{(r+1)^k}-1.$$

Soit :

$$\mathrm{P}(Z_k=0)-1=1-1+\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^r\binom{n}{r}}{(r+1)^k}=\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^r\binom{n}{r}}{(r+1)^k}.$$

Donc :

$$|\mathrm{P}(Z_k=0)-1|=\left|\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^r\binom{n}{r}}{(r+1)^k}\right|\leqslant\sum_{r=1}^{n}\frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}.$$

Or pour tout $r\geqslant 1$, on a $r+1\geqslant 2$, donc $(r+1)^k\geqslant 2^k$.

D'où :

$$|\mathrm{P}(Z_k=0)-1|\leqslant\sum_{r=1}^{n}\frac{\binom{n}{r}}{2^k}=\frac{1}{2^k}\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}=\frac{1}{2^k}(2^n-1).$$

Posons $C_n=2^n-1$.

Alors $\boxed{|\mathrm{P}(Z_k=0)-1|\leqslant\dfrac{C_n}{2^k}=\dfrac{2^n-1}{2^k}}$.

En particulier, $\mathrm{P}(Z_k=0)\to 1$ lorsque $k\to+\infty$.

Donc $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\mathrm{P}(Z_k=0) \text{ diverge grossièrement}}$.