La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies numpy et numpy.random de Python sont importées avec les commandes respectives import numpy as np, et import numpy.random as rd.

Exercice 1 (Oral ESCP 2024)

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation

$$(E_n) \qquad x^{n+1} = 1 + x + \cdots + x^n.$$

1. Montrer que, pour $x \neq 1$, l'équation (E_n) est équivalente à l'équation $x^{n+2} - 2x^{n+1} + 1 = 0$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet une unique solution u_n qui appartient à
$$I =]1, 2].$$
3. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite a.
5. Montrer que la série de terme général $a - u_n$ converge.
6. Étudier la nature de la série de terme général
$$w_n = u_n - a + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Exercice 2 (EDHEC 2009)

On désigne par α un entier strictement supérieur à 1 et on pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$$

Dans la suite de l'exercice, on écrira u_n au lieu de $u_n(\alpha)$.

1. a) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le réel u_n est bien défini et que $u_n > 0$.
   b) Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et en conclure qu'elle converge.
2. a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n\alpha\,(u_n - u_{n+1})$.
   b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)$
3. Montrer, en considérant $\ln(u_n)$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

   a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \dfrac{n\alpha}{\alpha - 1} u_{n+1}$.

   b) En déduire que : $\forall n \geq 2, \ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n} \left[\ln\left(1 - \dfrac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) \right]$

   c) A l'aide d'un développement limité d'ordre 1 en $\dfrac{1}{k}$, donner un équivalent, lorsque k est au voisinage de $+\infty$, de $\ln\left(1 - \dfrac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$

   d) Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.

5. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 2$.
   Ecrire un programme Python qui, pour un entier naturel n non nul donné, calcule et affiche la valeur de u_n.

Problème (HEC 2004 Appli)

Les parties notées en italique entre étoiles ne sont à traiter que par Clément

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n$.
Pour tout entier naturel non nul k, on note X^k le polynôme $x \mapsto x^k$ et on rappelle que la famille $(1, X, \ldots, X^{2n})$ est une base de E.

Si $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ sont $2n+1$ réels et Q est le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par : $Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$,

on définit le polynôme $s(Q)$ par : $s(Q)(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} x^k$.

Autrement dit, $s(Q)$ est le polynôme obtenu à partir de Q en « inversant l'ordre des coefficients ».
Par exemple, si n est égal à 2 et si $Q(x) = 4x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 1$, on obtient $s(Q)(x) = x^4 + 2x^2 + 7x + 4$.

Les trois parties de ce problème sont largement indépendantes.

PARTIE A

1. **Linéarité de s**
   Montrer que l'application $s : Q \mapsto s(Q)$ est une application linéaire de E dans lui-même.

2. **Diagonalisation dans un cas particulier**

   a) On considère la matrice carrée d'ordre 3 : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Justifier sans calcul que la matrice M est diagonalisable. Déterminer les valeurs propres de M et, pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.

   b) Vérifier que, dans le cas particulier $n = 1$, M est la matrice de l'application linéaire s dans la base $(1, X, X^2)$. Donner alors une base de vecteurs propres pour s.

3. **Etude du cas général**

On définit la famille de polynômes $(A_0, ..., A_{2n})$ par :

$$\text{pour tout réel } x, \qquad \begin{cases} A_k(x) = x^{2n-k} + x^k & \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ A_n(x) = x^n & \\ A_k(x) = x^k - x^{2n-k} & \text{si} \quad n+1 \leqslant k \leqslant 2n \end{cases}$$

a) Déterminer l'endomorphisme $s \circ s$.

b) Soit P un polynôme non nul et λ un réel vérifiant $s(P) = \lambda P$.
Calculer $s \circ s(P)$ et en déduire que les valeurs propres de s appartiennent à $\{1, -1\}$.

c) Déterminer $s(A_k)$ pour tout entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 2n$.

d) Montrer que la famille $(A_0, ..., A_{2n})$ est libre.

e) **En déduire que l'endomorphisme s est diagonalisable**, écrire la matrice de s dans la base $(A_0, ..., A_{2n})$.

PARTIE B

1. **Préliminaires**

On définit une suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes par :
pour tout réel x, $\quad R_1(x) = x, \quad R_2(x) = x^2 - 2$
et pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $\; R_{k+1}(x) = xR_k(x) - R_{k-1}(x)$

a) Déterminer les polynômes R_3 et R_4.

b) Montrer que, pour tout entier k strictement positif, R_k est un polynôme de degré k vérifiant pour tout réel x non nul, l'égalité : $\quad R_k\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^k + \dfrac{1}{x^k}$.

c) Pour tout réel a, déterminer, s'ils existent, les réels x non nuls qui vérifient la relation suivante : $x + \dfrac{1}{x} = a$.

2. **Étude des racines des polynômes vecteurs propres de s associés à la valeur propre** 1

Dans cette question, Q désigne un polynôme de degré $2n$ défini par : $Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$, tel que a_{2n} soit non nul et tel que, pour tout entier k de l'intervalle $[\![0; n]\!]$, l'on ait : $a_k = a_{2n-k}$.

On définit alors le polynôme $\widetilde{Q}$ par : $\quad \widetilde{Q}(x) = a_n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} R_k(x)$.

a) Vérifier que 0 n'est pas racine de Q.

b) Soit x un réel non nul, on pose : $y = x + \dfrac{1}{x}$.
Montrer que $\dfrac{Q(x)}{x^n}$ est nul si et seulement si $\widetilde{Q}(y)$ est nul.
Quel est l'intérêt de ce résultat dans la recherche des racines de Q ?

c) On suppose que n est égal à 3 et que Q est défini par :
$Q(x) = x^6 + x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 9x^2 + x + 1$.
Déterminer les racines de Q.

PARTIE C

Dans cette partie, p désigne un entier supérieur ou égal à 2.
On désigne par Ω l'ensemble des éléments de E dont les coefficients sont des entiers de l'intervalle $[\![1;p]\!]$, par $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de Ω et par $\mathbf{P}$ la probabilité uniforme sur $\mathcal{A}$, c'est à dire que, pour tout polynôme Q de Ω, l'on a : $\mathbf{P}(\{Q\}) = \dfrac{1}{\text{Card}(\Omega)}$.

Si Q est un élément de Ω et i un entier naturel non nul, on dit que Q et $s(Q)$ présentent i coïncidences lorsqu'il existe exactement i entiers k qui vérifient $a_k = a_{2n-k}$.
On définit alors la variable aléatoire Z qui, à tout polynôme Q de Ω, associe le nombre de coïncidences entre Q et $s(Q)$.
Par exemple pour $n = 2$, si $Q(x) = x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 5x + 1$, on a $Z(Q) = 3$.

1. **Description d'un cas simple**
   Dans cette question, on suppose que n est égal à 1 et que p est égal à 2.
   Ecrire tous les éléments de Ω puis déterminer la loi, l'espérance et la variance de Z.
2. **Étude générale de la variable aléatoire Z**
   On revient au cas général : n est strictement positif et p est supérieur ou égal à 2.
   a) Calculer le cardinal de Ω.
   b) Montrer que la plus petite valeur que peut prendre Z est 1 et justifier l'égalité suivante :
   $$\mathbf{P}([Z = 1]) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$$
   c) Montrer que la plus grande valeur que peut prendre Z est $2n+1$ et justifier l'égalité suivante :
   $$\mathbf{P}([Z = 2n+1]) = \frac{1}{p^n}$$
   d) Montrer que Z ne peut prendre que des valeurs impaires et, pour un entier j vérifiant $0 \leqslant j \leqslant n$, calculer $\mathbf{P}([Z = 2j+1])$.
   e) On pose $Y = \dfrac{Z-1}{2}$. Montrer que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   En déduire l'espérance et la variance de Z en fonction de n et de p.