La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies numpy et numpy.random de Python sont importées avec les commandes respectives import numpy as np, et import numpy.random as rd.

Exercice 1 (Oral ESCP 2024)

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation

$$(E_n) \qquad x^{n+1} = 1 + x + \cdots + x^n.$$

1. Montrer que, pour $x \neq 1$, l'équation (E_n) est équivalente à l'équation $x^{n+2} - 2x^{n+1} + 1 = 0$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet une unique solution u_n qui appartient à
$$I =]1, 2].$$
3. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite a.
5. Montrer que la série de terme général $a - u_n$ converge.
6. Étudier la nature de la série de terme général
$$w_n = u_n - a + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

1. Pour $x \neq 1$, la somme géométrique donne
$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$
Comme $x = 1$ ne vérifie pas (E_n), on obtient
$$\begin{aligned} x^{n+1} = 1 + x + \cdots + x^n &\iff x^{n+1}(x-1) = x^{n+1} - 1 \\ &\iff x^{n+2} - 2x^{n+1} + 1 = 0. \end{aligned}$$
$$\boxed{\text{Pour } x \neq 1, \quad (E_n) \iff x^{n+2} - 2x^{n+1} + 1 = 0.}$$
2. D'après la question 1, pour $x \neq 1$, l'équation (E_n) est équivalente à
$$g_n(x) = 0, \qquad g_n : x \longmapsto x^{n+2} - 2x^{n+1} + 1.$$
On a $g_n(1) = 0$ et $g_n(2) = 1$. De plus, pour tout $x \in [1, 2]$,
$$g_n'(x) = x^n\big((n+2)x - 2(n+1)\big).$$

Posons

$$c_n = \frac{2(n+1)}{n+2} \in]1,2[.$$

Alors $g_n'(x) < 0$ sur $[1, c_n[$ et $g_n'(x) > 0$ sur $]c_n, 2]$. La fonction g_n est donc strictement décroissante sur $[1, c_n]$ et strictement croissante sur $[c_n, 2]$.
On résume ces variations dans le tableau suivant :

x	1		c_n		2
$g_n'(x)$		$-$	0	$+$	
g_n	$g_n(1) = 0$	$\searrow$	$g_n(c_n) < 0$	$\nearrow$	$g_n(2) = 1$

Comme g_n est strictement décroissante sur $[1, c_n]$, on a :

$$g_n(c_n) < g_n(1) = 0.$$

Par le théorème de la bijection, la restriction de g_n à $[1, c_n]$ réalise une bijection sur $[g_n(c_n), 0]$. L'équation $g_n(x) = 0$ y admet donc l'unique solution $x = 1$. Cette solution ne vérifie pas (E_n), puisque $1 \neq n + 1$.
La restriction de g_n à $[c_n, 2]$ réalise une bijection sur $[g_n(c_n), 1]$. Comme 0 appartient à cet intervalle, il existe un unique $u_n \in [c_n, 2]$ tel que $g_n(u_n) = 0$. Comme $g_n(c_n) < 0$ et $g_n(2) > 0$, on a même $u_n \in]c_n, 2[$. Puisque $u_n \neq 1$, la question 1 permet de conclure que u_n est l'unique solution de (E_n) dans I.

L'équation (E_n) admet une unique solution $u_n \in]1, 2]$.

Remarque : on peut ici directement utiliser le théorème des gendarmes pour montrer que $u_n \to 2$. Ce n'est pas l'idée de l'énoncé, que j'ai gardé tel quel, mais c'est bien plus rapide...

3. Commençons par regarder $g_n(u_{n+1})$. Comme u_{n+1} est solution de (E_{n+1}), on a $1 = 2u_{n+1}^{n+2} - u_{n+1}^{n+3}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} g_n(u_{n+1}) &= u_{n+1}^{n+2} - 2u_{n+1}^{n+1} + 1 \\ &= u_{n+1}^{n+1}(u_{n+1} - 2) + 1 \\ &= u_{n+1}^{n+1}(u_{n+1} - 2) + 2u_{n+1}^{n+2} - u_{n+1}^{n+3} \\ &= u_{n+1}^{n+1}(u_{n+1} - 2 + 2u_{n+1} - u_{n+1}^2) \\ &= u_{n+1}^{n+1}(u_{n+1}(3 - u_{n+1}) - 2). \end{aligned}$$

Puisque $u_{n+1} \in]1, 2[$, on a seulement besoin du signe de $u_{n+1}(3 - u_{n+1}) - 2$. Posons $f : x \longmapsto x(3 - x) - 2$. Etudions ses variations (f est un polynome donc dérivable sur $\mathbb{R}$) :
Pour tout $x \in [1, 2]$,

$$f'(x) = 3 - 2x.$$

Ainsi, $f'(x) > 0$ sur $[1, 3/2[$ et $f'(x) < 0$ sur $]3/2, 2]$. Le tableau de variations de f

sur $[1,2]$ est donc

x	1		$\frac{3}{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$f(1)=0$	↗	$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}$	↘	$f(2)=0$

On en déduit que $f(x) > 0$ pour tout $x \in]1,2[$. En particulier,

$$g_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^{n+1} f(u_{n+1}) > 0.$$

Or, d'après le tableau de variations de g_n, on a $g_n(x) \leq 0$ sur $[1, c_n]$. Ainsi, $u_{n+1} \in]c_n, 2]$. Comme g_n est strictement croissante sur $[c_n, 2]$ et que $g_n(u_n) = 0$, on obtient

$$g_n(u_{n+1}) > g_n(u_n) = 0.$$

Comme g_n est strictement croissante sur $[c_n, 2]$, on en déduit

$$u_n < u_{n+1}.$$

Donc

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$$

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et majorée par 2. Elle converge donc vers un réel $a \in]1,2]$.
Supposons que $a < 2$.
D'après la question 1, puisque $u_n \neq 1$, on a

$$u_n^{n+2} - 2u_n^{n+1} + 1 = 0,$$

soit

$$u_n^{n+1}(2 - u_n) = 1.$$

Posons $b = \dfrac{a+1}{2}$. Comme $a > 1$, on a $b > 1$, et comme $u_n \to a$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$,

$$u_n \geq b.$$

Par croissance de $x \to x^{n+1}$ sur $[b, 2]$, on a

$$u_n^{n+1} \geq b^{n+1} \to +\infty.$$

Comme $2 - u_n \to 2 - a > 0$, on a alors

$$1 = u_n^{n+1}(2 - u_n) \to +\infty$$

L'hypothèse $a < 2$ est donc fausse. Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2.}$$

5. L'équation obtenue à la question 1 donne

$$u_n^{n+1}(2-u_n)=1, \qquad \text{d'où} \qquad 0<2-u_n=\frac{1}{u_n^{n+1}}.$$

Comme $u_n \geq u_1 > 1$,

$$0<2-u_n\leq \frac{1}{u_1^{n+1}}.$$

La série géométrique de raison $1/u_1 < 1$ converge. Par comparaison,

$$\boxed{\sum_{n\geq 1}(2-u_n) \text{ converge.}}$$

6. D'après la question 1, on a

$$(2-u_n)u_n^{n+1}=1, \qquad \text{d'où} \qquad u_n-2=-\frac{1}{u_n^{n+1}}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
|w_n| &= \left|-\frac{1}{u_n^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right| \\
&= \frac{\left|2^{n+1}-u_n^{n+1}\right|}{2^{n+1}u_n^{n+1}} \\
&\leq \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}u_n^{n+1}} \\
&= \frac{1}{u_n^{n+1}} \\
&\leq \frac{1}{u_1^{n+1}}.
\end{aligned}$$

En effet, $1 < u_n < 2$ et la fonction $t \mapsto t^{n+1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$0<u_n^{n+1}<2^{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \left|2^{n+1}-u_n^{n+1}\right|\leq 2^{n+1}.$$

Comme $u_1 > 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} 1/u_1^{n+1}$ est une série géométrique convergente, la comparaison des séries à termes positifs donne

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 1} w_n \text{ converge absolument, donc converge.}}$$

Exercice 2 (EDHEC 2009)

On désigne par α un entier strictement supérieur à 1 et on pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$$

Dans la suite de l'exercice, on écrira u_n au lieu de $u_n(\alpha)$.

1. a) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le réel u_n est bien défini et que $u_n > 0$.

b) Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et en conclure qu'elle converge.

2. a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n\alpha\,(u_n - u_{n+1})$.

   b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)$

3. Montrer, en considérant $\ln(u_n)$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

   a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{n\alpha}{\alpha - 1} u_{n+1}$.

   b) En déduire que : $\forall n \geq 2, \ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n} \left[\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right]$

   c) A l'aide d'un développement limité d'ordre 1 en $\frac{1}{k}$, donner un équivalent, lorsque k est au voisinage de $+\infty$, de $\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$

   d) Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.

5. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 2$.
   Ecrire un programme Python qui, pour un entier naturel n non nul donné, calcule et affiche la valeur de u_n.

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$t \longmapsto \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}$$

est continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$. De plus,

$$\frac{1}{(1+t^\alpha)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{n\alpha}}.$$

Comme $n\alpha > 1$, l'intégrale de comparaison converge sur $[1, +\infty[$. Donc u_n est bien défini par comparaison des intégrales de fonctions positives et

$$\boxed{u_n > 0.}$$

b) Pour tout $t \geq 0$, en multipliant $0 < \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ par $0 < \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} < 1$, on a

$$0 < \frac{1}{(1+t^\alpha)^{n+1}} < \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}.$$

Les fonctions étant continues et intégrables sur $[0, +\infty[$, la croissance de l'intégrale avec bornes dans le bon sens donne $0 < u_{n+1} < u_n$. Ainsi,

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante et convergente.}}$$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $R > 0$, effectuons une intégration par parties sur $[0, R]$ avec

$$u : t \longmapsto \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}, \qquad v : t \longmapsto t.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, R]$. Comme

$$u'(t) = -\frac{n\alpha t^{\alpha-1}}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \qquad \text{et} \qquad v'(t) = 1,$$

la formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_0^R \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} &= \left[\frac{t}{(1+t^\alpha)^n}\right]_0^R - \int_0^R t\left(-\frac{n\alpha t^{\alpha-1}}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\right) dt \\ &= \frac{R}{(1+R^\alpha)^n} + n\alpha \int_0^R \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\, dt.\end{aligned}$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, le terme de gauche tend vers 0 car $n\alpha > 1$. On obtient

$$u_n = n\alpha \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\, dt.$$

Or

$$\frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}} = \frac{1+t^\alpha-1}{(1+t^\alpha)^{n+1}} = \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} - \frac{1}{(1+t^\alpha)^{n+1}}.$$

Donc par linéarité de l'intégrale,

$$\boxed{u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1}).}$$

b) La relation précédente donne

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n\alpha}\right) u_n.$$

Initialisation.
Pour $n = 2$, cette relation donne

$$u_2 = u_1\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = u_1 \prod_{k=1}^{1}\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right).$$

Hérédité.
Soit $n \geq 2$. On suppose que

$$u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right).$$

Montrons que

$$u_{n+1} = u_1 \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right).$$

Alors

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n\alpha}\right) u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right).$$

Conclusion.
Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right).}$$

3. Comme $u_n > 0$,

$$\ln(u_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right).$$

Or

$$\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{k\alpha}.$$

La série harmonique diverge, donc par comparaison des séries à termes de signe constant, $\ln(u_n) \to -\infty$, puis

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

4. a) La relation de la question 2 donne $u_k = k\alpha(u_k - u_{k+1})$. En sommant de $k = 1$ à n,

$$\begin{aligned}
S_n &= \alpha \sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k+1}) \\
&= \alpha \left(\sum_{k=1}^{n} k u_k - \sum_{k=1}^{n} k u_{k+1} \right) \quad \text{(par linéarité de la somme)} \\
&= \alpha \left(\sum_{k=1}^{n} k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) u_k \right) \quad \text{(glissement d'indices)} \\
&= \alpha \left(u_1 + \sum_{k=2}^{n} \big(k u_k - (k-1)u_k\big) - n u_{n+1} \right) \\
&= \alpha \left(S_n - n u_{n+1} \right).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\alpha \cdot n \cdot u_{n+1} = (\alpha - 1) S_n$$

Ainsi, comme $\alpha > 1$,

$$\boxed{S_n = \frac{n\alpha}{\alpha - 1} u_{n+1}.}$$

b) Pour $n \geq 2$, la formule précédente et la relation produit donnent

$$\begin{aligned} S_n &= nu_1 \frac{\alpha}{\alpha-1} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) \\ &= nu_1 \frac{\alpha}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) \\ &= nu_1 \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{\alpha-1}{\alpha} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) \\ &= nu_1 \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) \end{aligned}$$

Il reste ce terme en $\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ à introduire et un n en trop. On a donc envie de calculer :

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) &= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \\ &= \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod_{k=2}^{n} k} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k}{\prod_{k=2}^{n} k} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

En regroupant tout ça, on trouve

$$S_n = u_1 \frac{\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)}{\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)} = u_1 \prod_{k=2}^{n} \frac{1 - \frac{1}{k\alpha}}{1 - \frac{1}{k}}.$$

On prend enfin le logarithme :

$$\boxed{\ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n} \left[\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right].}$$

c) Le développement limité $\ln(1-x) - x + o(x)$ donne, avec $x = 1/(k\alpha)$ et $x = 1/k$ qui tendent vers 0 quand $k \to +\infty$,

$$\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{\alpha k} + o\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{\alpha-1}{\alpha k} + o\left(\frac{1}{k}\right).$$

Donc :

$$\boxed{\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha-1}{\alpha k}.}$$

d) La somme des termes précédents est de même nature que la série harmonique, par comparaison des séries à termes positifs. Donc $\ln(S_n) \to +\infty$, puis $S_n \to +\infty$. Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n \text{ diverge.}}$$

5. Pour $\alpha = 2$, $u_1 = \pi/2$ et $u_{k+1} = (1 - 1/(2k))u_k$. Un programme possible est :

```
def calcul_u(n):
  u = np.pi / 2
  for k in range(1, n):
    u = (1 - 1 / (2 * k)) * u
  print(u)
```

Ce programme affiche la valeur de u_n.

Problème (HEC 2004 Appli)

Les parties notées en italique entre étoiles ne sont à traiter que par Clément

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n$.
Pour tout entier naturel non nul k, on note X^k le polynôme $x \mapsto x^k$ et on rappelle que la famille $(1, X, \ldots, X^{2n})$ est une base de E.

Si $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ sont $2n+1$ réels et Q est le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par : $Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$,

on définit le polynôme $s(Q)$ par : $s(Q)(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} x^k$.

Autrement dit, $s(Q)$ est le polynôme obtenu à partir de Q en « inversant l'ordre des coefficients ».
Par exemple, si n est égal à 2 et si $Q(x) = 4x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 1$, on obtient $s(Q)(x) = x^4 + 2x^2 + 7x + 4$.

Les trois parties de ce problème sont largement indépendantes.

PARTIE A

1. **Linéarité de s**
   Montrer que l'application $s : Q \mapsto s(Q)$ est une application linéaire de E dans lui-même.

2. **Diagonalisation dans un cas particulier**

   a) On considère la matrice carrée d'ordre 3 : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Justifier sans calcul que la matrice M est diagonalisable. Déterminer les valeurs propres de M et, pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.

   b) Vérifier que, dans le cas particulier $n = 1$, M est la matrice de l'application linéaire s dans la base $(1, X, X^2)$. Donner alors une base de vecteurs propres pour s.

3. **Etude du cas général**
   On définit la famille de polynômes $(A_0, ..., A_{2n})$ par :

pour tout réel x, $\begin{cases} A_k(x) = x^{2n-k} + x^k & \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ A_n(x) = x^n & \\ A_k(x) = x^k - x^{2n-k} & \text{si} \quad n+1 \leqslant k \leqslant 2n \end{cases}$

a) Déterminer l'endomorphisme $s \circ s$.

b) Soit P un polynôme non nul et λ un réel vérifiant $s(P) = \lambda P$.
Calculer $s \circ s(P)$ et en déduire que les valeurs propres de s appartiennent à $\{1, -1\}$.

c) Déterminer $s(A_k)$ pour tout entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 2n$.

d) Montrer que la famille $(A_0, ..., A_{2n})$ est libre.

e) **En déduire que l'endomorphisme s est diagonalisable**, écrire la matrice de s dans la base $(A_0, ..., A_{2n})$.

1. Si $Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$ et $R(x) = \sum_{k=0}^{2n} b_k x^k$, alors

$$s(Q+R)(x) = \sum_{k=0}^{2n} (a_{2n-k} + b_{2n-k}) x^k = s(Q)(x) + s(R)(x).$$

De même, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $s(\lambda Q) = \lambda s(Q)$. Enfin le degré est bien inférieur à $2n$. Donc

$$\boxed{s \text{ est une application linéaire de } E \text{ dans } E.}$$

2. a) M est une matrice symétrique, donc diagonalisable.

On résout ensuite le système $MX = \lambda X$. Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on obtient

$$\begin{cases} z = \lambda x, \\ y = \lambda y, \\ x = \lambda z. \end{cases}$$

Si $X \neq 0$, la deuxième équation impose $\lambda = 1$ lorsque $y \neq 0$. Dans ce cas, les deux autres équations donnent $z = x$, et

$$E_1(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \boxed{\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).}$$

Si $y = 0$, alors x et z ne sont pas tous deux nuls. En combinant les première et troisième équations, on obtient

$$x = \lambda z = \lambda^2 x.$$

Donc $\lambda^2 = 1$. La valeur $\lambda = 1$ est déjà étudiée ; pour $\lambda = -1$, on obtient $z = -x$, et

$$E_{-1}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \boxed{\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{-1, 1\}.}$$

b) Pour $n = 1$,

$$s(1) = X^2, \qquad s(X) = X, \qquad s(X^2) = 1.$$

La matrice de s dans $(1, X, X^2)$ est donc M. Une base de vecteurs propres est

$$\boxed{(1 + X^2,\ X,\ 1 - X^2).}$$

C'est bien une famille libre de cardinal 3 dans un espace de dimension 3, donc c'est une base de vecteurs propres.

3. a) Pour $Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$,

$$s(s(Q))(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k = Q(x).$$

Donc

$$\boxed{s \circ s = \mathrm{Id}_E\,.}$$

C'est ce qu'on appelle une symétrie vectorielle.

b) Si $s(P) = \lambda P$ avec $P \neq 0$, alors, par linéarité de s,

$$P = s(s(P)) = s(\lambda P) = \lambda s(P) = \lambda^2 P.$$

Comme $P \neq 0$, on obtient $\lambda^2 = 1$, donc

$$\boxed{\lambda \in \{-1, 1\}.}$$

c) Si $0 \leq k \leq n-1$, l'inversion des coefficients laisse A_k inchangé. Il en est de même pour $A_n = X^n$. Si $n+1 \leq k \leq 2n$, l'inversion change le signe de A_k. Ainsi,

$$s(A_k) = A_k \quad (0 \leq k \leq n), \qquad s(A_k) = -A_k \quad (n+1 \leq k \leq 2n).$$

d) Supposons

$$\sum_{k=0}^{2n} \lambda_k A_k = 0.$$

Le coefficient de X^n donne $\lambda_n = 0$. Pour $0 \leq k < n$, les coefficients de X^k et de X^{2n-k} donnent respectivement

$$\lambda_k - \lambda_{2n-k} = 0, \qquad \lambda_k + \lambda_{2n-k} = 0.$$

Donc $\lambda_k = \lambda_{2n-k} = 0$. La famille est libre. Comme elle contient $2n+1 = \dim(E)$ polynômes, c'est une base de E.

$$\boxed{(A_0, \ldots, A_{2n}) \text{ est une base de } E.}$$

e) Dans cette base, la matrice de s est diagonale. Elle vaut

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{(A_0,\ldots,A_{2n})}(s) = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{n+1},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{n}).}$$

L'endomorphisme s est donc diagonalisable, ses valeurs propres sont 1 et -1 et les sous-espaces propres sont de dimensions respectives $n+1$ et n.

PARTIE B

1. **Préliminaires**

On définit une suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes par :
pour tout réel x, $\quad R_1(x) = x, \quad R_2(x) = x^2 - 2$
et pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $\ R_{k+1}(x) = xR_k(x) - R_{k-1}(x)$

a) Déterminer les polynômes R_3 et R_4.

b) Montrer que, pour tout entier k strictement positif, R_k est un polynôme de degré k vérifiant pour tout réel x non nul, l'égalité : $\quad R_k\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^k + \dfrac{1}{x^k}$.

c) Pour tout réel a, déterminer, s'ils existent, les réels x non nuls qui vérifient la relation suivante : $x + \dfrac{1}{x} = a$.

2. **Étude des racines des polynômes vecteurs propres de s associés à la valeur propre** 1

Dans cette question, Q désigne un polynôme de degré $2n$ défini par : $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$, tel que a_{2n} soit non nul et tel que, pour tout entier k de l'intervalle $[\![0; n]\!]$, l'on ait : $a_k = a_{2n-k}$.

On définit alors le polynôme $\widetilde{Q}$ par : $\quad \widetilde{Q}(x) = a_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{n-k} R_k(x)$.

a) Vérifier que 0 n'est pas racine de Q.

b) Soit x un réel non nul, on pose : $y = x + \dfrac{1}{x}$.
Montrer que $\dfrac{Q(x)}{x^n}$ est nul si et seulement si $\widetilde{Q}(y)$ est nul.
Quel est l'intérêt de ce résultat dans la recherche des racines de Q ?

c) On suppose que n est égal à 3 et que Q est défini par :
$Q(x) = x^6 + x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 9x^2 + x + 1$.
Déterminer les racines de Q.

1. a) La relation de récurrence donne

$$R_3(x) = xR_2(x) - R_1(x) = x^3 - 3x,$$

puis

$$\boxed{R_4(x) = xR_3(x) - R_2(x) = x^4 - 4x^2 + 2.}$$

Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, R_k est unitaire de degré k et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$R_k\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k}.$$

Initialisation.
Les expressions $R_1(X) = X$ et $R_2(X) = X^2 - 2$ montrent que R_1 et R_2 sont unitaires, de degrés respectifs 1 et 2. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$R_1\left(x + \frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x}, \qquad R_2\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Ainsi, pour $k = 1$ et $k = 2$, R_k est unitaire de degré k et l'égalité annoncée est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
Hérédité.
Soit $k \geq 2$. On suppose que R_{k-1} est unitaire de degré $k-1$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$R_{k-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}},$$

et que R_k est unitaire de degré k et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$R_k\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k}.$$

Montrons que R_{k+1} est unitaire de degré $k+1$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$R_{k+1}\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}.$$

Comme R_k est unitaire de degré k et R_{k-1} est de degré $k-1$, la relation $R_{k+1} = XR_k - R_{k-1}$ montre que R_{k+1} est unitaire de degré $k+1$. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, les hypothèses de récurrence donnent

$$\begin{aligned} R_{k+1}\left(x + \frac{1}{x}\right) &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) \\ &= x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}. \end{aligned}$$

On a donc établi les deux propriétés annoncées au rang $k+1$.
Conclusion.

Par récurrence double, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, R_k est unitaire de degré k et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\boxed{R_k\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k} \quad \text{et} \quad \deg(R_k) = k.}$$

b) La relation $x + 1/x = a$ équivaut, puisque $x \neq 0$, à

$$x^2 - ax + 1 = 0.$$

Son discriminant est $\Delta = a^2 - 4$. Si $|a| < 2$, il n'y a aucune solution réelle. Si $a = 2$, l'unique solution est $x = 1$, et si $a = -2$, l'unique solution est $x = -1$. Enfin, si $|a| > 2$, les deux solutions réelles sont

$$\boxed{x = \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}.}$$

2. a) La symétrie des coefficients donne $a_0 = a_{2n} \neq 0$. Ainsi $Q(0) = a_0 \neq 0$, donc

$$\boxed{0 \text{ n'est pas racine de } Q.}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et posons $y = x + 1/x$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{Q(x)}{x^n} &= a_n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) \\ &= a_n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} R_k(y) \\ &= \widetilde{Q}(y).\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\frac{Q(x)}{x^n} = 0 \iff \widetilde{Q}\left(x+\frac{1}{x}\right) = 0.}$$

L'intérêt est de ramener la recherche des racines de Q, de degré $2n$, à celle des racines de $\widetilde{Q}$, de degré n, puis de résoudre une équation du second degré pour chaque valeur de y obtenue.

c) Pour $n = 3$,

$$\widetilde{Q}(y) = 2 - 9R_1(y) + R_2(y) + R_3(y).$$

Avec $R_1(y) = y$, $R_2(y) = y^2 - 2$ et $R_3(y) = y^3 - 3y$,

$$\widetilde{Q}(y) = y^3 + y^2 - 12y = y(y+4)(y-3).$$

Si $y = 0$, alors $x^2+1 = 0$, pas de solution réelle. Si $y = -4$, alors $x^2+4x+1 = 0$, d'où $x = -2 \pm \sqrt{3}$. Enfin, si $y = 3$, alors $x^2 - 3x + 1 = 0$, d'où $x = (3 \pm \sqrt{5})/2$.

$$\boxed{\mathrm{Rac}(Q) = \left\{-2+\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}.}$$

PARTIE C

Dans cette partie, p désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On désigne par Ω l'ensemble des éléments de E dont les coefficients sont des entiers de l'intervalle $[\![1;p]\!]$, par $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de Ω et par $\mathbf{P}$ la probabilité uniforme sur $\mathcal{A}$, c'est à dire que, pour tout polynôme Q de Ω, l'on a : $\mathbf{P}(\{Q\}) = \dfrac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.

Si Q est un élément de Ω et i un entier naturel non nul, on dit que Q et $s(Q)$ présentent i coïncidences lorsqu'il existe exactement i entiers k qui vérifient $a_k = a_{2n-k}$.
On définit alors la variable aléatoire Z qui, à tout polynôme Q de Ω, associe le nombre de coïncidences entre Q et $s(Q)$.
Par exemple pour $n = 2$, si $Q(x) = x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 5x + 1$, on a $Z(Q) = 3$.

1. **Description d'un cas simple**
   Dans cette question, on suppose que n est égal à 1 et que p est égal à 2.
   Ecrire tous les éléments de Ω puis déterminer la loi, l'espérance et la variance de Z.
2. **Étude générale de la variable aléatoire Z**
   On revient au cas général : n est strictement positif et p est supérieur ou égal à 2.
   a) Calculer le cardinal de Ω.
   b) Montrer que la plus petite valeur que peut prendre Z est 1 et justifier l'égalité suivante :
   $$\mathbf{P}([Z = 1]) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$$
   c) Montrer que la plus grande valeur que peut prendre Z est $2n+1$ et justifier l'égalité suivante :
   $$\mathbf{P}([Z = 2n+1]) = \frac{1}{p^n}$$
   d) Montrer que Z ne peut prendre que des valeurs impaires et, pour un entier j vérifiant $0 \leqslant j \leqslant n$, calculer $\mathbf{P}([Z = 2j+1])$.
   e) On pose $Y = \dfrac{Z-1}{2}$. Montrer que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   En déduire l'espérance et la variance de Z en fonction de n et de p.

1. Lorsque $n = 1$ et $p = 2$, les éléments de Ω sont
   a) $1 + x + x^2$;
   b) $1 + x + 2x^2$;
   c) $1 + 2x + x^2$;
   d) $1 + 2x + 2x^2$;
   e) $2 + x + x^2$;
   f) $2 + x + 2x^2$;
   g) $2 + 2x + x^2$;
   h) $2 + 2x + 2x^2$.

   La coïncidence centrale $a_1 = a_1$ est toujours vérifiée. Les quatre premiers et les quatre derniers polynômes sont répartis de sorte que $a_0 = a_2$ pour quatre d'entre eux et $a_0 \neq a_2$ pour les quatre autres. Ainsi,
   $$\mathbf{P}(Z = 1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}(Z = 3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$
   Par conséquent, les espérances et variances existent car support fini,
   $$\mathbb{E}(Z) = 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} = 2,$$

et par transfert

$$\mathbb{E}(Z^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{2} = 5.$$

Donc par K-H :

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) = 2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(Z) = 5 - 2^2 = 1.}$$

2. a) Les $2n+1$ coefficients peuvent être choisis indépendamment parmi p valeurs. Donc

$$\boxed{\mathrm{Card}(\Omega) = p^{2n+1}.}$$

b) L'indice $k = n$ donne toujours une coïncidence, puisque $a_n = a_{2n-n}$. Donc $Z \geq 1$.
Pour que $Z = 1$, il faut et il suffit que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on ait $a_k \neq a_{2n-k}$. Pour une paire donnée,

$$\mathbf{P}(a_k \neq a_{2n-k}) = \frac{p(p-1)}{p^2} = \frac{p-1}{p}.$$

Les n paires étant indépendantes,

$$\boxed{\mathbf{P}(Z = 1) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n.}$$

c) La valeur maximale est obtenue lorsque les n paires non centrales coïncident. Dans ce cas, les coefficients $a_0, \ldots, a_n$ sont libres et les coefficients $a_{n+1}, \ldots, a_{2n}$ sont imposés. Il y a donc p^{n+1} polynômes favorables, d'où

$$\boxed{\mathbf{P}(Z = 2n+1) = \frac{p^{n+1}}{p^{2n+1}} = \frac{1}{p^n}.}$$

d) Pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$, une coïncidence concernant les indices k et $2n-k$ est comptée deux fois : elle est vraie pour k et pour $2n-k$. La coïncidence centrale est comptée une seule fois. Ainsi Z ne prend que des valeurs impaires. Si exactement j des n paires non centrales coïncident, alors $Z = 2j+1$. Le choix des j paires se fait de $\binom{n}{j}$ façons, et la probabilité correspondante vaut par indépendance

$$\left(\frac{1}{p}\right)^j \left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-j}.$$

Ainsi, par incompatibilité des événements,

$$\boxed{\forall j \in [\![0, n]\!], \quad \mathbf{P}(Z = 2j+1) = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{p}\right)^j \left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-j}.}$$

On pouvait aussi voir que l'on regarde le résultat d'une binomiale.

e) Posons, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{si } a_k = a_{2n-k}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les variables $I_0, \dots, I_{n-1}$ sont indépendantes et suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $1/p$. Comme

$$Y = \frac{Z-1}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} I_k,$$

on obtient

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{p}\right).}$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{n}{p}, \qquad \mathrm{Var}(Y) = \frac{n}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Comme $Z = 2Y + 1$,

$$\mathbb{E}(Z) = 2\mathbb{E}(Y) + 1 = 1 + \frac{2n}{p},$$

et

$$\mathrm{Var}(Z) = 4\,\mathrm{Var}(Y).$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) = 1 + \frac{2n}{p} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(Z) = \frac{4n}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right).}$$