**La calculatrice est interdite.** Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Dans tout le problème, on considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, c'est-à-dire pour laquelle, à chaque lancer, les apparitions de « pile » et de « face » sont équiprobables. On admet que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Pour tout entier naturel non nul $n$, on désigne par $R_n$ l'événement « *pile apparaît au lancer de rang n* » et par $S_n$ l'événement « *face apparaît au lancer de rang n* »

# 1 Un résultat utile

On considère une variable aléatoire $X$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, pour tout entier naturel non nul $n$, on pose : $a_n = \mathbf{P}([X = n])$.

1. a) Justifier que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de nombres réels positifs ou nuls vérifiant $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$.

   b) Montrer que, pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, la série de terme général $a_n x^n$ est convergente.

2. On désigne par $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par : $\forall x \in [0, 1],\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

   On suppose que cette fonction est dérivable au point 1 ; elle vérifie donc :
   $$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = f'(1)$$

   a) Établir pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0, 1[$ l'égalité :
   $$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)$$

   b) En déduire que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(1) - f(x)}{1 - x}$ est croissante sur $[0, 1[$ et qu'elle vérifie pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0, 1[$ les inégalités suivantes :
   $$0 \leqslant \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leqslant f'(1)$$

   c) Montrer que, pour tout entier naturel $N$ non nul, on a : $0 \leqslant \sum_{n=1}^{N} n a_n \leqslant f'(1)$.

   En déduire que la série de terme général $n a_n$ est convergente.

d) À l'aide des résultats des question a) et c), justifier pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0,1[$, les inégalités suivantes : $\quad 0 \leqslant \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leqslant f'(1)$

e) Montrer que la variable aléatoire $X$ admet une espérance donnée par :
$$\mathbf{E}(X) = f'(1)$$

# 2 Loi du temps d'attente de la première configuration « pile, pile, face »

Soit $Y$ la variable aléatoire désignant le rang du lancer où pour la première fois apparaît un face précédé de deux piles si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais.
*Par exemple, si les résultats des premiers lancers sont (face, face, pile, face, pile, face, pile, pile, face, ...), la variable aléatoire $Y$ prend la valeur* 9.
On pose $c_1 = c_2 = 0$ et, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3 : $c_n = \mathbf{P}([Y = n])$.
Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3, on note $B_n$ l'événement $R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n$ et $U_n$ l'événement $\displaystyle\bigcup_{i=3}^{n} B_i$.

1. On pose $u_1 = u_2 = 0$, et pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3 : $u_n = \mathbf{P}(U_n)$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone et convergente.
2. a) Calculer, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 3, la probabilité de l'événement $B_n$.
   b) Vérifier que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 3, les événements $B_n$, $B_{n+1}$ et $B_{n+2}$ sont deux à deux incompatibles.
   c) En déduire les valeurs des nombres $u_3, u_4$ et $u_5$.
3. Soit $n$ un entier $n$ supérieur ou égal à 5.
   a) Justifier l'égalité des événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$ et préciser leur probabilité.
   b) Exprimer l'événement $U_{n+1}$ en fonction des événements $U_n$ et $B_{n+1}$ ; en déduire l'égalité suivante :
   $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.
   c) Vérifier les égalités suivantes $\quad u_3 = u_2 + \dfrac{1}{8}(1-u_1) \quad$ et $\quad u_4 = u_3 + \dfrac{1}{8}(1-u_2)$.
   d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et en déduire la probabilité de l'événement $[Y = 0]$.
4. Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose : $\quad v_n = 1 - u_n$.
   a) Préciser les nombres $v_1, v_2, v_3, v_4$.
   b) Exprimer, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 3, $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$ et de $v_{n-2}$.
   c) En déduire pour tout entier $N$ supérieur ou égal à 1, l'égalité suivante :
   $$\frac{7}{8} - v_{N+3} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{N} v_k$$
   d) Montrer que la série de terme général $v_n$ est convergente et calculer sa somme.
5. Soit $g$ et $h$ les fonctions définies sur l'intervalle $[0,1]$ par :
   $$\forall x \in [0,1], \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n \quad \text{et} \quad h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n$$

a) Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 4. Exprimer l'événement $[Y = n]$ en fonction des événements $\overline{U_{n-1}}$ et $U_n$ ($\overline{U_{n-1}}$ désignant l'événement contraire de $U_{n-1}$). En déduire l'égalité : $c_n = v_{n-1} - v_n$.

b) Valider l'égalité $c_n = v_{n-1} - v_n$ dans le cas où $n$ est égal à 2 ou 3.

c) Établir pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, l'égalité :

$$g(x) = (x-1)h(x) + x$$

d) Exprimer pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0, 1[$, le quotient $\dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1}$ en fonction de $h(x)$.

e) Justifier la croissance de la fonction $h$ et, pour tout entier naturel $N$ non nul et tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0, 1]$, la double inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{N} v_k x^k \leqslant h(x) \leqslant h(1).$$

En déduire la relation suivante : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} h(x) = h(1)$.

f) Montrer que $g$ est dérivable au point 1 et, à l'aide de la **Partie I**, en déduire que la variable aléatoire $Y$ admet une espérance égale à 8.

# 3 Paradoxe de Walter Penney (1969)

Deux joueurs $J$ et $J'$ s'affrontent dans un jeu utilisant la même expérience aléatoire que précédemment avec les règles suivantes :

- le joueur $J$ est gagnant si la configuration « pile, pile, face » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « face, pile, pile » n'apparaisse ;
- le joueur $J'$ est gagnant si la configuration « face, pile, pile » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « pile, pile, face » n'apparaisse ;
- si l'un des joueurs est gagnant, l'autre est perdant.

On se propose de démontrer que, dans ce jeu, le joueur $J'$ possède un net avantage sur le joueur $J$.

1. Soit $Y'$ la variable aléatoire désignant le rang du lancer où, pour la première fois, apparaît un pile précédé d'un pile lui-même précédé d'un face si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais.
   *Par exemple, si les résultats des premiers lancers sont (face, face, pile, face, pile, pile, face, ...), la variable aléatoire $Y'$ prend la valeur* 6.
   Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3, on désigne par $B'_n$ l'événement $S_{n-2} \cap R_{n-1} \cap R_n$, par $U'_n$ l'événement $\bigcup\limits_{i=3}^{n} B'_i$ et on note $u'_n$ la probabilité de $U'_n$.

   a) Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 3.
   Les événements $B'_n, B'_{n+1}$ et $B'_{n+2}$ sont-ils deux à deux incompatibles ?

   b) En déduire que, si on pose $u'_1 = u'_2 = 0$, le même raisonnement que dans la **Partie II**, conduit à l'égalité $u'_{n+1} = u'_n + \dfrac{1}{8}(1 - u'_{n-2})$, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3.

   c) En déduire l'égalité des suites $(u_n)_{n \geqslant 1}$ et $(u'_n)_{n \geqslant 1}$.

   d) Prouver que les deux variables aléatoires $Y$ et $Y'$ suivent la même loi et vérifient : $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(Y')$.

2. Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3, on note $G_n$ l'événement « *le joueur $J$ est déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang $n$* » et $g_n$ la probabilité de $G_n$.

a) Calculer $g_3$ et $g_4$ et établir, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3, l'égalité suivante : $g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) En déduire la probabilité pour que le joueur $J$ soit déclaré gagnant.

3. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on désigne par $d_n$ la probabilité que lors des $n$ premiers lancers n'apparaissent jamais deux piles consécutifs.

a) Préciser $d_1$ et $d_2$.

b) En considérant les résultats des lancers de rang 1 et 2, justifier pour tout entier naturel $n$ non nul, l'égalité suivante : $\quad d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$.

c) Montrer qu'il existe deux constantes réelles $\alpha$ et $\beta$ que l'on ne cherchera pas à calculer, telles que, pour tout tout entier naturel $n$ non nul, on ait :

$$d_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$$

d) En déduire que la série de terme général $d_n$ converge et, en utilisant l'égalité du b), prouver l'égalité suivante : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5$.

4. On désigne par $T$ la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang du lancer à l'issue duquel l'un des joueurs est déclaré gagnant, si cela se produit, et la valeur 0 si aucun des joueurs n'est gagnant.

a) Justifier, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, l'égalité :

$$\mathrm{P}([T > n] \cup [T = 0]) = \frac{1}{2^n} + d_n \cdot$$

b) En déduire, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3, l'égalité :

$$\mathrm{P}([T = n]) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n \cdot$$

c) Montrer que la probabilité que l'un des joueurs soit déclaré gagnant est égale à 1.

5. Calculer la probabilité que le joueur $J'$ soit déclaré gagnant et conclure.

6. Si la configuration gagnante du joueur $J$ avait été « pile, pile, face, pile, pile, face » et la configuration gagnante du joueur $J'$ avait été « face, face, pile, face, face, pile » , quelle aurait-été la conclusion ?

7. Soit $d$ et $t$ les fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad d(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n \quad \text{et} \quad t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([T = n])x^n$$

a) Établir pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ l'égalité suivante :

$$t(x) = (x-1)\left(d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)}\right) + x$$

b) Exprimer pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0, 1[$, le quotient $\dfrac{t(x) - t(1)}{x - 1}$ en fonction de $d(x)$.

c) En s'inspirant de la question 5e de la **Partie II**, justifier l'égalité suivante : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} d(x) = d(1)$.

d) Montrer que la variable aléatoire $T$ admet une espérance et préciser $\mathbf{E}(T)$.

# Corrigé

## Partie I : Un résultat utile

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \mathbf{P}([X = n])$ est une probabilité, donc $a_n \geq 0$. Les *événements* $[X = n]$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, forment une partition de $\Omega$, puisque $X$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Par probabilités totales avec le SCE $([X = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$, on obtient :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1.}$$

(b) Soit $x \in [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq a_n x^n \leq a_n$. La série de terme général $a_n$ converge d'après la question précédente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $a_n x^n$ converge.

2. (a) On a $f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$. Soit $x \in [0, 1[$. Les séries définissant $f(1)$ et $f(x)$ convergent, donc, en soustrayant leurs sommes puis en divisant par $1 - x > 0$, on obtient :

$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{1 - x^n}{1 - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)$$

en utilisant la formule de somme d'une suite géométrique de raison différente de 1.

(b) Soient $x, y \in [0, 1[$ avec $x < y$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Par croissance des fonctions puissances sur $[0, 1[$, et comme les $a_n$ sont positifs, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq \sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{k=0}^{n-1} y^k.$$

En faisant tendre $N$ vers $+\infty$, on obtient :

$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} y^k = \frac{f(1) - f(y)}{1 - y}.$$

La fonction considérée est donc croissante sur $[0, 1[$. Elle est donc plus petite sur $[0, 1[$ que sa limite en 1. Donc :

$$\boxed{0 \leq \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq f'(1).}$$

(c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente et l'expression obtenue en a), pour tout $x \in [0, 1[$,

$$0 \leq \sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq f'(1)$$

car les termes de la série sont tous positifs. En faisant tendre $x$ vers 1 par valeurs inférieures, on obtient $0 \leq \sum_{n=1}^{N} n a_n \leq f'(1)$. Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{n\geq 1} n a_n$ sont croissantes et majorées par $f'(1)$ ; donc la série converge.

(d) Pour tout $x \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq n$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a donc :

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq \sum_{n=1}^{N} a_n n = \sum_{n=1}^{N} n a_n.$$

En faisant tendre $N$ vers $+\infty$, on obtient :

$$\boxed{0 \leq \frac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leq f'(1),}$$

la premiere et dernière inégalités résultant de la question c).

(e) $X$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} |n| P(X=n)$ converge, c'est-à-dire si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$ converge. La question c) montre que cette série converge, donc $X$ admet une espérance.
En faisant tendre $x$ vers 1 par valeurs inférieures dans l'encadrement de la question d), on obtient $f'(1) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leq f'(1)$. Donc :

$$\boxed{f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n}$$

La variable aléatoire $X$ admet ainsi une espérance et

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = f'(1).}$$

## Partie II : Loi du temps d'attente de la première configuration

1. Pour tout $n \geq 3$, $U_n \subset U_{n+1}$, donc $u_n \leq u_{n+1}$. De plus, comme toute probabilté, $u_n \leq 1$ pour tout $n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{croissante et majorée, donc convergente.}}$

2. (a) Les trois lancers intervenant dans $B_n$ sont indépendants et chacun des résultats imposés a une probabilité $1/2$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{P}(B_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.}$$

(b) $B_n$ et $B_{n+1}$ imposent respectivement face et pile au lancer $n$ ; $B_n$ et $B_{n+2}$ imposent face et pile au lancer $n$ ; enfin, $B_{n+1}$ et $B_{n+2}$ imposent face et pile au lancer $n+1$. Ces paires sont incompatibles, donc $\boxed{B_n, B_{n+1}, B_{n+2} \text{ sont deux à deux incompatibles.}}$

(c) Par incompatibilité, $u_3 = \mathbf{P}(B_3) = 1/8$, $u_4 = \mathbf{P}(B_3) + \mathbf{P}(B_4) = 1/4$, $u_5 = \mathbf{P}(B_3) + \mathbf{P}(B_4) + \mathbf{P}(B_5) = 3/8$ et

$$\boxed{u_3 = \frac{1}{8}, \qquad u_4 = \frac{1}{4}, \qquad u_5 = \frac{3}{8}.}$$

3. Soit $n \geq 5$.

(a) Les *événements* $B_{n-1}$ et $B_n$ sont incompatibles avec $B_{n+1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} U_n \cap B_{n+1} &= \left(\left(\bigcup_{i=3}^{n-2} B_i\right) \cap B_{n+1}\right) \cup (B_{n-1} \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1}) \\ &= \left(\bigcup_{i=3}^{n-2} B_i\right) \cap B_{n+1} \\ &= \boxed{U_{n-2} \cap B_{n+1}.} \end{aligned}$$

L'événement $U_{n-2}$ ne dépend que des $n-2$ premiers lancers et $B_{n+1}$ des trois lancers suivants ; ils sont donc indépendants, d'où

$$\boxed{\mathbf{P}(U_n \cap B_{n+1}) = P(U_n)P(B_{n+1}) = \frac{1}{8}u_{n-2}.}$$

(b) Comme $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$, la formule de la probabilité d'une union donne

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \mathbf{P}(B_{n+1}) - \mathbf{P}(U_n \cap B_{n+1}) \\ &= u_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}u_{n-2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).}$$

(c) Les valeurs initiales donnent $u_2 + \frac{1}{8}(1-u_1) = \frac{1}{8} = u_3$ et $u_3 + \frac{1}{8}(1-u_2) = \frac{1}{4} = u_4$. Ce qu'on voulait montrer.

(d) Notons $\ell$ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En passant l'égalité de la question b) à la limite, on obtient $\ell = \ell + \frac{1}{8}(1-\ell)$, donc $1-\ell = 0$, d'où $\boxed{\ell = 1}$.

L'événement $U_n$ signifie que la configuration est apparue au plus tard au rang $n$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq \mathbf{P}(Y=0) \leq 1 - u_n$, d'où avec les gendarmes :

$$\boxed{\mathbf{P}(Y=0) = 0.}$$

4. (a) D'après les valeurs de $u_1, u_2, u_3, u_4$,

$$\boxed{v_1 = v_2 = 1, \qquad v_3 = \frac{7}{8}, \qquad v_4 = \frac{3}{4}.}$$

(b) Pour tout $n \geq 3$, $v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - u_n - \frac{1}{8}(1-u_{n-2})$, donc

$$\boxed{v_{n+1} = v_n - \frac{1}{8}v_{n-2}.}$$

Attention, ce n'est pas une SRL2, à cause du $n-2$. On pourrait l'étudier avec des matrices, mais ce n'est pas le choix de l'énoncé.

(c) Pour tout $k \geq 1$, $v_{k+3} = v_{k+2} - \frac{1}{8}v_k$ ce qu'on réécrit comme $v_{k+3} - v_{k+2} = -\frac{1}{8}v_k$. En sommant pour $k$ de 1 à $N$, on a une somme télescopique qui apparaît :

$$\sum_{k=1}^{N}(v_{k+3}-v_{k+2}) = -\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{N} v_k$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=4}^{N+3} v_k - \sum_{k=3}^{N+2}(v_k = -\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{N} v_k$$
$$\Leftrightarrow v_{N+3} - v_3 = -\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{N} v_k.$$

Comme $v_3 = 7/8$,

$$\boxed{\frac{7}{8} - v_{N+3} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{N} v_k.}$$

(d) On a $v_n = 1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. En faisant tendre $N$ vers $+\infty$ dans la relation ci-dessus,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 7.}$$

5. (a) Pour $n \geq 4$, $[Y = n] = B_n \cap \overline{U_{n-1}} = U_n \cap \overline{U_{n-1}}$. Comme $U_{n-1} \subset U_n$, on obtient

$$c_n = u_n - u_{n-1} = v_{n-1} - v_n.$$

(b) Pour $n = 2$, $c_2 = 0$ et $v_1 - v_2 = 1 - 1 = 0$. Pour $n = 3$, $c_3 = \mathbf{P}(B_3) = 1/8$ et $v_2 - v_3 = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$. L'égalité vaut donc aussi pour ces deux valeurs.

(c) Commençons par remarquer que les deux fonctions considérées sont bien définies sur $[0,1]$. Pour $g$ c'est directement la partie I, pour $h$ c'est la question 4.d. et le même raisonnement qu'en 1.b. On a donc bien $g, h : [0,1] \to \mathbb{R}$.
En utilisant $c_n = v_{n-1} - v_n$ pour $n \geq 2$, et $v_1 = 1$, on trouve, pour $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty}(v_{n-1} - v_n)x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} v_{n-1}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} v_n x^n \quad \text{ces séries sont bien convergentes} \\ &= x\sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n - v_1 x\right) \\ &= (x-1)h(x) + x. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{g(x) = (x-1)h(x) + x.}$

(d) L'égalité précédente prise en $x = 1$ donne $g(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n = 1$. Par la relation précédente,

$$\boxed{\frac{g(x) - g(1)}{x-1} = \frac{(x-1)h(x) + x - 1}{x-1} = h(x) + 1 \quad (x \in [0,1[).}$$

(e) Les coefficients $v_n$ sont positifs ou nuls, donc $h$ est croissante sur $[0,1]$ (même raisonnement que partie I avec $x < y$ et on compare les sommes partielles). Pour tout $N \geq 1$ et $x \in [0,1]$,

$$\sum_{k=1}^{N} v_k x^k \leq h(x) \leq h(1).$$

En faisant tendre $x$ vers 1 par valeurs inférieures, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{N} v_k \leq \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x) \leq h(1).$$

Valable pour tout $N$ donc en faisant tendre $N$ vers $+\infty$, on a

$$h(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k \leq \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x) \leq h(1).$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x) = h(1).}$$

(f) D'après la question d),

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = h(1) + 1 = 8.$$

La variable $Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, presque sûrement, d'après la question 3.d. La question 2.e) de la partie I donne donc

$$\boxed{\mathbf{E}(Y) = 8.}$$

## Partie III : Paradoxe de Walter Penney

1. (a) Idem que partie II : $B'_n$ et $B'_{n+1}$ imposent respectivement pile et face au lancer $n-1$ ; $B'_n$ et $B'_{n+2}$ imposent pile et face au lancer $n$ ; enfin, $B'_{n+1}$ et $B'_{n+2}$ imposent aussi pile et face au lancer $n$. Ces *événements* sont donc deux à deux incompatibles.

   (b) On a $u'_3 = 1/8$, $u'_4 = 1/4$ et $u'_5 = 3/8$. Pour $n \geq 5$, le raisonnement de la partie II donne $u'_{n+1} = u'_n + \dfrac{1}{8}(1 - u'_{n-2})$. Cette relation est aussi vérifiée pour $n = 3, 4$ grâce aux valeurs initiales. Elle vaut donc pour tout $n \geq 3$.

   (c) Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont les mêmes valeurs initiales pour $n = 1, 2, 3, 4$.

   **Initialisation.**

   On a $u'_n = u_n$ pour $n = 1, 2, 3, 4$.

   **Hérédité.**

   Soit $n \geq 4$. On suppose que $u'_{n-2} = u_{n-2}$, $u'_{n-1} = u_{n-1}$ et $u'_n = u_n$. Montrons que $u'_{n+1} = u_{n+1}$. Les relations de récurrence des questions précédentes donnent

$$u'_{n+1} = u'_n + \frac{1}{8}(1 - u'_{n-2}) = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) = u_{n+1}.$$

   **Conclusion.**

   Par récurrence, les deux suites sont égales :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad u'_n = u_n.}$$

(d) Pour tout $n \geq 3$, $\mathbf{P}(Y = n) = u_n - u_{n-1}$ et $\mathbf{P}(Y' = n) = u'_n - u'_{n-1}$. Les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant égales, ces probabilités sont les mêmes. Elles suivent donc la même loi et

$$\boxed{\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(Y') = 8.}$$

2. (a) Supposons que $J$ gagne au rang $n$. Les lancers $n-2, n-1, n$ donnent alors pile, pile, face. S'il y avait un face parmi les lancers $1, \ldots, n-3$, soit $j$ le rang du dernier de ces faces. Les lancers $j+1$ et $j+2$ seraient alors pile, donc la configuration face, pile, pile apparaîtrait au plus au rang $n-1$, ce qui contredit la victoire de $J$. Ainsi, les $n-1$ premiers lancers sont pile. Réciproquement, la suite formée de $n-1$ piles puis d'une face ne contient pas face, pile, pile et fait apparaître pile, pile, face pour la première fois au rang $n$. Ainsi, $G_n = R_1 \cap \cdots \cap R_{n-1} \cap S_n$, et par indépendance des lancers,

$$\boxed{g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n \geq 3).}$$

(b) Les *événements* $G_n$ sont deux à deux incompatibles. La probabilité que $J$ gagne vaut

$$\sum_{n=3}^{+\infty} g_n = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \boxed{\frac{1}{4}.}$$

3. (a) Pour un lancer, il ne peut y avoir deux piles consécutifs, donc $d_1 = 1$. Pour deux lancers, les trois issues autres que (pile,pile) conviennent, donc $d_2 = 3/4$.

(b) Notons $D_n$ l'événement « il n'y a pas deux piles consécutifs dans les $n$ premiers lancers ».
En utilisant la formule des probabilités totales avec le SCE $(R_{n+2}, S_{n+2})$, on obtient :

$$d_{n+2} = \mathbf{P}(D_{n+2} \cap R_{n+2}) + \mathbf{P}(D_{n+2} \cap S_{n+2})$$

Or,

$$\mathbf{P}(D_{n+2} \cap R_{n+2}) = \mathbf{P}_{[R_{n+2}]}(D_{n+2})\mathbf{P}(R_{n+2}) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(D_{n+1})$$

car la séquence pile, pile n'arrive pas au dernier coup. De même,

$$\mathbf{P}(D_{n+2} \cap S_{n+2}) = \mathbf{P}_{[S_{n+2}]}(D_{n+2})\mathbf{P}(S_{n+2}) = \mathbf{P}(D_n \cap R_{n+1})\mathbf{P}(S_{n+2}) = \frac{1}{4}\mathbf{P}(D_n)$$

car la on ne veut pas pile, pile sur les deux derniers coups. Donc :

$$\begin{aligned} d_{n+2} &= \mathbf{P}(D_{n+2} \cap R_{n+2}) + \mathbf{P}(D_{n+2} \cap S_{n+2}) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{P}(D_{n+1}) + \frac{1}{4}\mathbf{P}(D_n) \\ &= \boxed{\frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n.} \end{aligned}$$

Cette fois-ci c'est bien une SRL2, avec $d_1 = 1$ et $d_2 = 3/4$.

(c) L'équation caractéristique est $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{4} = 0$, de racines distinctes $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$. La forme générale des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 donne donc :

$$\boxed{d_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n,}$$

pour certaines constantes réelles $\alpha$ et $\beta$.

(d) Comme $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$, la série $\sum d_n$ converge. Notons $D$ sa somme. En sommant la relation de récurrence pour $n \geq 1$, on obtient

$$D - d_1 - d_2 = \frac{1}{2}(D - d_1) + \frac{1}{4}D.$$

Avec $d_1 = 1$ et $d_2 = 3/4$, cette égalité donne $D = 5$, donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5.}$$

4. (a) Par incompatibilité, on a déjà $\mathbf{P}([T > n] \cup [T = 0]) = \mathbf{P}([T > n]) + \mathbf{P}([T = 0])$. Comme $[T = 0] \subset [Y = 0]$, on a $\mathbf{P}([T = 0]) \leq \mathbf{P}([Y = 0]) = 0$, donc $\mathbf{P}([T = 0]) = 0$. L'absence des deux configurations gagnantes dans les $n$ premiers lancers signifie soit qu'il n'y a pas deux piles consécutifs, soit que les lancers sont tous pile. En effet, toute suite d'au moins trois tirages contenant un bloc de deux piles et au moins un face comporte un bloc face, pile, pile ou pile, pile, face. Ces cas sont disjoints donc

$$\boxed{\mathbf{P}([T > n] \cup [T = 0]) = d_n + \frac{1}{2^n}.}$$

J'ai ici le résultat pour $n \geq 3$, et je pense que c'est ce qui était attendu au lieu de $n \geq 2$.

(b) En posant $q_n = \mathbf{P}([T > n] \cup [T = 0])$, on a $q_{n-1} - q_n = \mathbf{P}([T = n])$. Pour $n \geq 3$, la question a) donne

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([T = n]) &= d_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}} - d_n - \frac{1}{2^n} \\ &= d_{n-1} - d_n + \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{P}([T = n]) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n.}$$

(c) En sommant pour $n \geq 3$, et puisque $d_n \to 0$, on obtient

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \mathbf{P}([T = n]) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + d_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Il est donc certain que l'un des deux joueurs gagne : $\boxed{\mathbf{P}(T > 0) = 1.}$

5. Puisqu'un des joueurs gagne presque sûrement et que la probabilité de victoire de $J$ vaut $1/4$, celle de $J'$ vaut

$$\boxed{1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.}$$

Le joueur $J'$ possède donc un net avantage.

6. La configuration de $J'$ est le complément pile-face de celle de $J$. En échangeant pile et face dans chaque lancer, les deux configurations sont permutées et la loi de l'expérience reste inchangée. Donc dans cette hypothèse, par symétrie,

$$\boxed{\mathbf{P}(J \text{ gagne}) = \mathbf{P}(J' \text{ gagne})}$$

*Remarque :* On peut en fait encore montrer que l'un des deux joueurs gagne presque sûrement, on aurait donc $\mathbf{P}(J \text{ gagne}) = \mathbf{P}(J' \text{ gagne}) = 1/2$.

7. (a) Pour tout $x \in [0,1]$, la relation de la question 4.b donne

$$\begin{aligned} t(x) &= \sum_{n=3}^{+\infty} \left( \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n \right) x^n \\ &= \frac{x^3}{4(2-x)} + (x-1)d(x) + x - \frac{x^2}{4} \\ &= (x-1)\left( d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} \right) + x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{t(x) = (x-1)\left( d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} \right) + x.}$$

(b) Comme $t(1) = 1$ d'après la question 4.c, on obtient, pour $x \in [0,1[$,

$$\boxed{\frac{t(x)-t(1)}{x-1} = d(x) + 1 + \frac{x^2}{2(2-x)}.}$$

(c) Les coefficients $d_n$ sont positifs ou nuls, donc $d$ est croissante sur $[0,1]$. Pour tout $N \geq 1$ et $x \in [0,1]$,

$$\sum_{k=1}^{N} d_k x^k \leq d(x) \leq d(1).$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} d_k \to d(1) = 5$, le théorème des gendarmes donne

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} d(x) = d(1) = 5.}$$

(d) En faisant tendre $x$ vers 1 par valeurs inférieures dans le quotient de la question b), on obtient

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{t(x)-t(1)}{x-1} = d(1) + 1 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}.$$

La variable aléatoire $T$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ presque sûrement, d'après la question 4.c. En appliquant la partie I à sa fonction génératrice $t$, on conclut que $T$ admet une espérance et

$$\boxed{\mathbf{E}(T) = \frac{13}{2}.}$$