La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Exercice 1 : EML 2023 - Séries et intégrales

Dans cet exercice x désigne un élément de $]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'on a : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$.

   (b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que : $S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq S_n - \frac{1}{n}$.

   (c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, un encadrement de S_n.

   (d) Démontrer que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

2. ***Informatique.***

   (a) On considère la fonction suivante écrite en langage Python.

```
def rang(a):
    k=1
    s=1
    while s<a:
        k=k+1
        s=s+1/k
    return k
```

   Expliquer ce que produit l'appel `rang(50)`.

   (b) Le code suivant

```
from numpy import exp
exp(49)
```

   renvoie : `1.9073465724950998e+21`.
   Expliquer rapidement ce que cela laisse penser si l'on fait l'appel `rang(50)`.

3. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,x]$. Simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$.

(c) Démontrer que : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$.

(d) En déduire que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge, de somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Exercice 2 : Ecricome 2012 - Intégrales et suites

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. On pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^2}, \quad I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que l'intégrale I_a converge et donner sa valeur.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Justifier que l'intégrale $f(x)$ converge.

   Dans la suite de l'exercice, on admettra que l'intégrale $g(x)$ converge.

2. Établir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$, puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Établir que : $0 < f(x) - f(y) \leq \frac{y-x}{2}$.
4. Montrer que f est une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0,1]$.
5. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On notera α cette solution. Justifier que $\alpha \in]0,1]$.
6. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\alpha - u_n| \leq \frac{1}{2^n}$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$.
   b) On suppose qu'une fonction `Ecricome` est déjà écrite en `Python`, qui à un réel x donné renvoie le réel $f(x)$.
   À l'aide de la fonction `Ecricome`, écrire une fonction `suite` en `Python` qui, à un réel $\varepsilon > 0$ fourni par l'utilisateur, calcule le premier entier N tel que $\frac{1}{2^N} \leq \varepsilon$ et renvoie la valeur de u_N correspondante.
7. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que :

$$|f(x+h) - f(x) - g(x)h| \leq \frac{h^2}{3}.$$

   Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = -g(x).$$

8. On considère la fonction T définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $T(x) = xf(x)$.
   Justifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \text{puis que :} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T(x) = \ln(1+x).$$

Problème : EML 2012 - Formule de Stirling et probas continues

Partie I : Formule de Stirling

Pour tout entier naturel n, on définit $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. a) Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   b) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $W_n > 0$.
3. a) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
   b) En déduire, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0$.
4. a) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $W_n \geq W_{n+1} \geq \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.
   b) En déduire : $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$, puis : $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
5. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $W_{2n} = \dfrac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$.

On note, pour tout entier n tel que $n \geq 1$: $A_n = \dfrac{1}{n!}n^n e^{-n}\sqrt{n}$.

On note, pour tout entier n tel que $n \geq 2$: $a_n = -1 - (n - \dfrac{1}{2})\ln(1 - \dfrac{1}{n})$.

6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} a_n$ converge.

   On pourra établir que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$ *en effectuant un développement limité à l'ordre 2 en* $\dfrac{1}{n}$ *de* a_n.
7. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 2$: $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.
8. En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite ℓ est strictement positive.
9. a) Justifier : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ell}n^n e^{-n}\sqrt{n}$.
   b) En utilisant l'expression de W_{2n} à l'aide de factorielles, en déduire la valeur de ℓ et l'équivalent suivant :
   $$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Partie II : Étude de variables aléatoires

Soit un réel a strictement positif et la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout réel x, par :

$$\begin{cases} f_a(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \\ f_a(x) = \dfrac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

10. Montrer que f_a est une densité.

On considère une variable aléatoire X admettant f_a comme densité.

11. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

12. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.
(Indication pour vous pas dans le sujet original) On rappelle le résultat suivant, donné par la loi normale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2a^2}} \mathrm{d}u = 1.$

13. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $V(X)$ et calculer $V(X)$.

14. a) On considère une variable aléatoire V suivant une loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$.
Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln(V)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X.
b) Écrire une fonction `Python` nommée `simul`, prenant en entrée le paramètre $a > 0$ et retournant une simulation de la variable X.

Pour tout entier n tel que $n \geq 2$, on considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue, dans U_n, des tirages d'une boule avec remise. On suppose que tous les tirages dans U_n sont équiprobables. On s'arrête dès que l'on obtient une boule déjà obtenue.
On note T_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

15. Justifier : $P(T_n > n + 1) = 0$.

16. Déterminer, pour tout entier k tel que $k \leq n$: $P(T_n > k)$

On considère la variable aléatoire $Y_n = \dfrac{T_n}{\sqrt{n}}$.

Soit $y \in [0; +\infty[$. On note k_n l'entier naturel égal à la partie entière de $y\sqrt{n}$.
On a donc : $k_n \leq y\sqrt{n} \leq 1 + k_n$.

17. Justifier : $P(Y_n > y) = P(T_n > k_n)$.

18. En utilisant 9.(b), montrer : $P(Y_n > y) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-k_n} \left(1 - \dfrac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}$.

19. a) Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $t \mapsto -t + (t-1)\ln(1-t)$ en 0.
b) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(-k_n + (k_n - n)\ln\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)\right) = -\frac{y^2}{2}$.

20. Déterminer une variable aléatoire Y telle que, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(y) = F_Y(y).$$

On dit alors que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 2}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.
