La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Exercice 1 : EML 2023 - Séries et intégrales

Dans cet exercice x désigne un élément de $]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'on a : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$.

   (b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que : $S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq S_n - \frac{1}{n}$.

   (c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, un encadrement de S_n.

   (d) Démontrer que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

2. ***Informatique.***

   (a) On considère la fonction suivante écrite en langage Python.

```
def rang(a):
    k=1
    s=1
    while s<a:
        k=k+1
        s=s+1/k
    return k
```

   Expliquer ce que produit l'appel `rang(50)`.

   (b) Le code suivant

```
from numpy import exp
exp(49)
```

   renvoie : `1.9073465724950998e+21`.
   Expliquer rapidement ce que cela laisse penser si l'on fait l'appel `rang(50)`.

3. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,x]$. Simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$.

(c) Démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0.$

(d) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge, de somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Corrigé

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue et strictementdécroissante sur $[k, k+1]$. Ainsi, pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

En intégrant sur $[k, k+1]$, par croissance de l'intégrale avec les bornes dans le bon sens, on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}.}$$

(b) Soit $n \geq 2$. En sommant les inégalités précédentes pour k allant de 1 à $n-1$, on obtient avec Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq S_n - \frac{1}{n}}$$

(on a effectué un glissement d'indice dans la somme de gauche).

(c) Pour tout $n \geq 2$, on a $\displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln n$. L'encadrement précédent devient donc, d'une part, à gauche :

$$S_n \leq \ln n + 1,$$

et à droite :

$$S_n \geq \ln n + \frac{1}{n}.$$

En combinant ces deux inégalités, on obtient l'encadrement suivant pour tout $n \geq 2$:

$$\boxed{\ln n + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln n + 1.}$$

(d) Pour tout $n \geq 2$, $\ln n > 0$. En divisant l'encadrement précédent par $\ln n$, on obtient :

$$1 + \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{S_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Les deux bornes tendent vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\ln n} = 1$, soit :

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.}$$

2. (a) À l'initialisation, $k = 1$ et $s = 1 = \sum_{j=1}^{1} \frac{1}{j}$. À chaque passage dans la boucle, k est augmenté de 1 et s reçoit le terme $\frac{1}{k}$ correspondant. La variable s représente donc la somme harmonique S_k. La fonction renvoie le premier entier k tel que $S_k \geq a$. Ainsi, 'rang(50)' cherche le premier entier k tel que $S_k \geq 50$.

   (b) D'après la question 1.(d), S_k est équivalent à $\ln k$ lorsque k tend vers $+\infty$. Pour atteindre une somme proche de 50, il faut donc un rang de l'ordre de e^{50}, c'est-à-dire de l'ordre de 10^{21} ; $e^{49} \simeq 1{,}9 \times 10^{21}$. Le calcul demanderait un nombre considérable d'itérations. En outre, dans l'exécution réelle en Python, s est un nombre flottant : à partir d'un certain rang, l'ajout de $1/k$ est trop petit pour modifier s. La boucle peut alors rester bloquée et ne jamais renvoyer de valeur.

3. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, x]$. Comme $0 < x < 1$, on a $t < 1$. La somme géométrique donne alors :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \frac{1 - t^n}{1 - t}.}$$

   (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^x t^{k-1} \mathrm{d}t = \frac{x^k}{k}$. Par linéarité de l'intégrale et d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} &= \int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{1 - t^n}{1 - t} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1 - t} - \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} \mathrm{d}t \\
&= -\ln(1 - x) - \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

   (c) La fonction $t \mapsto \frac{t^n}{1 - t}$ est continue et positive sur $[0, x]$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1 - t}$ est croissante sur $[0, x]$, donc, pour tout $t \in [0, x]$, on a $0 \leq t^n \leq x^n$ et $\frac{1}{1 - t} \leq \frac{1}{1 - x}$. Ainsi :

$$0 \leq \frac{t^n}{1 - t} \leq \frac{x^n}{1 - x}.$$

   En intégrant sur $[0, x]$, par croissance de l'intégrale avec les bornes dans le bon sens, on obtient :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} \mathrm{d}t \leq \frac{x^n}{1 - x} \int_0^x 1 \mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{(1 - x)}.$$

   Comme $0 < x < 1$, le membre de droite tend vers 0. Le théorème des gendarmes donne donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} \mathrm{d}t = 0.}$$

   (d) D'après la question 3.(b), les sommes partielles vérifient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1 - x) - \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} \mathrm{d}t.$$

Le terme intégral tend vers 0 d'après la question précédente. Ainsi, les sommes partielles convergent vers $-\ln(1-x)$, ce qui prouve la convergence de la série et donne sa somme :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).}$$

Exercice 2 : Ecricome 2012 - Intégrales et suites

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. On pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^2}, \quad I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que l'intégrale I_a converge et donner sa valeur.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Justifier que l'intégrale $f(x)$ converge.

   Dans la suite de l'exercice, on admettra que l'intégrale $g(x)$ converge.

2. Établir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$, puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Établir que : $0 < f(x) - f(y) \leq \dfrac{y-x}{2}$.
4. Montrer que f est une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0,1]$.
5. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On notera α cette solution. Justifier que $\alpha \in]0,1]$.
6. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\alpha - u_n| \leq \dfrac{1}{2^n}$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$.
   b) On suppose qu'une fonction `Ecricome` est déjà écrite en `Python`, qui à un réel x donné renvoie le réel $f(x)$.
   À l'aide de la fonction `Ecricome`, écrire une fonction `suite` en `Python` qui, à un réel $\varepsilon > 0$ fourni par l'utilisateur, calcule le premier entier N tel que $\dfrac{1}{2^N} \leq \varepsilon$ et renvoie la valeur de u_N correspondante.
7. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que :

$$|f(x+h) - f(x) - g(x)h| \leq \frac{h^2}{3}.$$

   Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = -g(x).$$

8. On considère la fonction T définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $T(x) = xf(x)$.
   Justifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \text{puis que :} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T(x) = \ln(1+x).$$

Corrigé

1. $I_a = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t$ est une intégrale exponentielle avec $a > 0$. Ainsi $\boxed{I_a \text{ converge et vaut } \frac{1}{a}.}$

   La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{x+e^t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ (pour tout $t \in [0,+\infty[$, $x + e^t > 0$) donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t}$ est généralisée en $+\infty$. En $+\infty$:

   — On a $\dfrac{1}{x+e^t} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{e^t} = e^{-t}$.

   — Pour tout $t \in [0,+\infty[$, $e^{-t} \geq 0$.

   — L'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge d'après ce qui précède ($1 > 0$).

   Par comparaison, on en déduit que $\boxed{\text{l'intégrale } f(x) \text{ converge.}}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$x + e^t - 2\sqrt{xe^t} = \sqrt{x}^2 + \sqrt{e^t}^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{e^t} = (\sqrt{x} - \sqrt{e^t})^2 \geq 0.$$

   On a donc bien $2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $t \in [0,+\infty[$, $\dfrac{1}{x+e^t} \geq 0$ et l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t}$ converge. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $f(x) \geq 0$ (bornes dans le bon sens).

   On a pour tout $t \in [0,+\infty[$, $0 < 2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$ donc $\dfrac{1}{x+e^t} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{xe^t}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{t}{2}}$ par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Par croissance de l'intégrale (toutes les intégrales $f(x)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}I_{1/2}$ convergent), on obtient :

$$f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}I_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 2 = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

   On a donc bien :

$$\boxed{0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.}$$

3. Prenons $0 \leq x < y$ et calculons, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(y+e^t)-(x+e^t)}{(x+e^t)(y+e^t)}\mathrm{d}t \\ &= (y-x)\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+e^t)(y+e^t)}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

   D'une part, on a :

   — pour tout $t \in [0,+\infty[$, $\dfrac{1}{(x+e^t)(y+e^t)} \geq 0$;

— $t \mapsto \dfrac{1}{(x+e^t)(y+e^t)}$ est **continue** sur $[0,+\infty[$ et n'est pas la fonction nulle ;

— l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+e^t)(y+e^t)}\mathrm{d}t$ converge.

Par stricte positivité de l'intégrale, on obtient $f(x) - f(y) = \underbrace{(y-x)}_{>0}\underbrace{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+e^t)(y+e^t)}\mathrm{d}t}_{>0}$ $\boxed{>0}$.

D'autre part, on a pour tout $t \in [0,+\infty[$:

$x+e^t \geq e^t \geq 0$ et $y+e^t \geq e^t \geq 0$ donc $(x+e^t)(y+e^t) \geq e^{2t} > 0$ donc $\dfrac{1}{(x+e^t)(y+e^t)} \leq e^{-2t}$.

Les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+e^t)(y+e^t)}\mathrm{d}t$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\mathrm{d}t$ étant convergentes, on obtient par croissance de l'intégrale avec bornes dans le bon sens que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+e^t)(y+e^t)}\mathrm{d}t \leq I_2 = \frac{1}{2}.$$

En multipliant cette inégalité par $y-x \geq 0$, on obtient bien $\boxed{f(x) - f(y) \leq \dfrac{y-x}{2}.}$

4. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Montrons que f est continue en x_0.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
Si $x \geq x_0$, on a d'après la question précédente :

$$0 \leq f(x_0) - f(x) \leq \frac{x-x_0}{2}$$

et donc $|f(x_0) - f(x)| \leq \dfrac{|x-x_0|}{2}$.
Si $x < x_0$, on a toujours avec la question précédente :

$$0 \leq f(x) - f(x_0) \leq \frac{x_0-x}{2}.$$

et donc $|f(x_0) - f(x)| \leq \dfrac{|x-x_0|}{2}$.
Dans tous les cas, on a donc :

$$0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{|x-x_0|}{2}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{|x-x_0|}{2} = 0$, on en déduit par théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0))$ existe et vaut 0, soit encore que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ainsi f est continue en x_0. Et comme ceci est vrai pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$, $\boxed{f \text{ est bien continue sur } \mathbb{R}_+.}$

Soit x et y deux réels de $\mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. On a prouvé que $f(x) - f(y) > 0$, soit encore $f(x) > f(y)$. Par suite $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$. Par théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et vaut 0. D'autre part, on a $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = I_1 = 1$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } [0,+\infty[\text{ sur }]0,1].}$

5. Soit $g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto f(x) - x$. g est continue comme somme de fonctions qui le sont. Elle est strictement décroissante car somme de deux fonctions strictement décroissantes, et on a :
$$g(0) = f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.$$
D'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $]-\infty, 1]$. Par conséquent, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$. Enfin, puisque f est à valeurs dans $]0, 1]$, on a $\alpha = f(\alpha) \in]0, 1]$.

6. a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\alpha - u_n| \leq \dfrac{1}{2^n}$.

Init. Pour $n = 0$, on a :
$$|\alpha - u_0| = \alpha \leq 1 = \frac{1}{2^0}.$$
Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n, à savoir $|\alpha - u_n| \leq \dfrac{1}{2^n}$. On a :
$$|\alpha - u_{n+1}| = |f(\alpha) - f(u_n)| \underbrace{\leq}_{\text{quest. 4.}} \frac{|\alpha - u_n|}{2} \underbrace{\leq}_{\text{H.R.}} \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$
La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence, on a donc $\boxed{|\alpha - u_n| \leq \dfrac{1}{2^n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, on a par théorème des gendarme $\lim\limits_{n\to+\infty} |\alpha - u_n| = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha}$.

b) Le programme suivant convient :

```
def suite(epsilon):
    u = 0 ;
    N = 0 ;
    while (1/2**N) > epsilon :
        N = N+1
        u = Ecricome(u)
    return u
```

La variable `u` contient d'abord $0 = u_0$. Puis après le premier passage dans la boucle, elle vaut $f(u_0) = u_1$. Après un second passage, elle vaudra donc $f(u_1) = u_2$, etc. À la fin du programme, après N passages dans la boucle `while`, où N est bien le premier entier tel que $\dfrac{1}{2^N} \leq \varepsilon$, elle vaut donc u_N.

7. On a :
$$\begin{aligned}|f(x+h) - f(x) + hg(x)| &= \left|\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+h+e^t} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t} + h\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^2}\right| \\ &= \left|\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2}\right)\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

par linéarité (les intégrales sont toutes convergentes). Or, on a pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2}\right| &= \left|\frac{(x+e^t)^2 - (x+h+e^t)(x+e^t) + h(x+h+e^t)}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2}\right| \\ &= \left|\frac{(x+e^t)^2 - (x+e^t)^2 - h(x+e^t) + h(x+e^t) + h^2}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2}\right| \\ &= \left|\frac{h^2}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2}\right| \\ &= \frac{h^2}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2} \text{ car ce réel est positif.}\end{aligned}$$

Comme $x+h+e^t \geq e^t > 0$ (car $x+h \geq 0$) et $(x+e^t)^2 \geq e^{2t} > 0$ (car $x \geq 0$), on a par produit $(x+h+e^t)(x+e^t)^2 \geq e^{3t} > 0$, ce qui donne :

$$0 \leq \left|\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2}\right| \leq \frac{h^2}{e^{3t}} = h^2 e^{-3t}.$$

L'intégrale $I_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3t}\mathrm{d}t$ converge, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h^2 e^{-3t}\mathrm{d}t$ aussi par linéarité. Et par comparaison, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2}\right| \mathrm{d}t$ converge.
Par inégalité triangulaire puis par croissance, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2}\right)\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2}\right| \mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^{+\infty} h^2 e^{-3t}\mathrm{d}t = h^2 I_3\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{|f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leq \frac{h^2}{3}.}$$

On suppose $h \neq 0$. On a alors :

$$0 \leq \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + g(x)\right| \leq \frac{|h|}{3}.$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h|}{3} = 0$. Donc par encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + g(x)\right)$ existe et vaut 0. Ainsi $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = -g(x)$, ce qui signifie que f est dérivable en x et $f'(x) = -g(x)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } f' = -g.}$

8. T est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}T'(x) = f(x) + xf'(x) = f(x) - xg(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t} - x\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(x+e^t)-x}{(x+e^t)^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(x+e^t)^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Pour $A \in [0, +\infty[$, on a :

$$\int_0^A \frac{e^t}{(x+e^t)^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{x+e^t}\right]_0^A = -\frac{1}{x+e^A} + \frac{1}{x+1} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+x}.$$

On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,\ T'(x) = \frac{1}{x+1}.}$

Ainsi T est une primitive sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, donc de la forme $T(x) = \ln(1+x) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Mais lorsque $x \to 0^+$, on a $f(x) \to f(0) = 1$, et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} T(x) = 0$. On en déduit que :

$$0 = \lim_{x\to 0^+} \ln(1+x) + c = c.$$

Ainsi on a $\boxed{T(x) = \ln(x+1) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*.}$

Problème : EML 2012 - Formule de Stirling et probas continues

Partie I : Formule de Stirling

Pour tout entier naturel n, on définit $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. a) Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   b) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $W_n > 0$.
3. a) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
   b) En déduire, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0$.
4. a) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $W_n \geq W_{n+1} \geq \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.
   b) En déduire : $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$, puis : $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
5. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $W_{2n} = \dfrac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$.

On note, pour tout entier n tel que $n \geq 1$: $A_n = \dfrac{1}{n!}n^n e^{-n}\sqrt{n}$.

On note, pour tout entier n tel que $n \geq 2$: $a_n = -1 - (n - \dfrac{1}{2})\ln(1 - \dfrac{1}{n})$.

6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} a_n$ converge.

   On pourra établir que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$ *en effectuant un développement limité à l'ordre 2 en* $\dfrac{1}{n}$ *de* a_n.
7. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 2$: $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.
8. En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite ℓ est strictement positive.

9. a) Justifier : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} n^n e^{-n}\sqrt{n}$.

   b) En utilisant l'expression de W_{2n} à l'aide de factorielles, en déduire la valeur de ℓ et l'équivalent suivant :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Partie II : Étude de variables aléatoires

Soit un réel a strictement positif et la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout réel x, par :

$$\begin{cases} f_a(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \\ f_a(x) = \dfrac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

10. Montrer que f_a est une densité.

On considère une variable aléatoire X admettant f_a comme densité.

11. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
12. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.
    (Indication pour vous pas dans le sujet original) On rappelle le résultat suivant, donné par la loi normale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2a^2}} \mathrm{d}u = 1.$
13. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $V(X)$ et calculer $V(X)$.
14. a) On considère une variable aléatoire V suivant une loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$.
    Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln(V)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X.

    b) Écrire une fonction `Python` nommée `simul`, prenant en entrée le paramètre $a > 0$ et retournant une simulation de la variable X.

Pour tout entier n tel que $n \geq 2$, on considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue, dans U_n, des tirages d'une boule avec remise. On suppose que tous les tirages dans U_n sont équiprobables. On s'arrête dès que l'on obtient une boule déjà obtenue.
On note T_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

15. Justifier : $P(T_n > n + 1) = 0$.
16. Déterminer, pour tout entier k tel que $k \leq n$: $P(T_n > k)$

On considère la variable aléatoire $Y_n = \dfrac{T_n}{\sqrt{n}}$.

Soit $y \in [0; +\infty[$. On note k_n l'entier naturel égal à la partie entière de $y\sqrt{n}$.
On a donc : $k_n \leq y\sqrt{n} \leq 1 + k_n$.

17. Justifier : $P(Y_n > y) = P(T_n > k_n)$.
18. En utilisant 9.(b), montrer : $P(Y_n > y) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-k_n} \left(1 - \dfrac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}$.
19. a) Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $t \mapsto -t + (t-1)\ln(1-t)$ en 0.

    b) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(-k_n + (k_n - n)\ln\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)\right) = -\frac{y^2}{2}$.
20. Déterminer une variable aléatoire Y telle que, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(y) = F_Y(y).$$

On dit alors que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 2}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.

Corrigé

Partie I : Formule de Stirling

Pour tout entier naturel n, on définit $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t$.

1. On a $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \boxed{= \frac{\pi}{2}}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\mathrm{d}t = \Big[\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \boxed{= 1}$.
2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$, calculons :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n+1}(t) - \cos^n(t))\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^n(t)}_{\geq 0}\underbrace{(\cos(t)-1)}_{\leq 0}\mathrm{d}t \leq 0$$

par positivité de l'intégrale avec $0 \leq \dfrac{\pi}{2}$. La suite $\boxed{(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc décroissante.}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n : t \mapsto (\cos(t))^n$ est **continue**, **positive** sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et $f_n(0) = 1 \neq 0$. Par stricte positivité de l'intégrale, on conclut que $\boxed{W_n > 0}$.

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue une intégration par parties.
BROUILLON :

$u : t \mapsto \cos^{n+1}(t)$	$v' : t \mapsto \cos(t)$
$u' : t \mapsto -(n+1)\cos^n(t)\sin(t)$	$v : t \mapsto \sin(t)$

AU PROPRE :
Les fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \cos^{n+1} t$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \times \cos^{n+1}(t)\mathrm{d}t \\
&= \Big[\sin(t)\cos^{n+1}(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)(n+1)\sin(t)\cos^n(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^n(t)\sin^2(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^n(t)(1-\cos^2(t))\mathrm{d}t \quad \text{(Pythagore)} \\
&= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \quad \text{(linéarité de l'intégrale).}
\end{aligned}$$

D'où l'égalité $\boxed{(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

b) Posons pour tout $n \geq 0$, $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} \overset{3.(a)}{=} (n+1)W_nW_{n+1} = u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante, de sorte que $u_n = u_0$ pour tout $n \geq 0$, ce qui se réécrit :

$$\boxed{(n+1)W_{n+1}W_n = (0+1)W_1W_0 = W_1W_0.}$$

4. a) Pour tout entier naturel n, on a par décroissance de la suite (W_n) :

$$W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n \quad \overset{3.(a)}{\Rightarrow} \quad \boxed{W_n \geq W_{n+1} \geq \frac{n+1}{n+2}W_n.}$$

b) En quotientant ces inégalités par $W_n > 0$, on obtient :

$$1 \geq \frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{n+1}{n+2}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1$, le théorème des gendarmes implique que la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{W_{n+1}}{W_n}$ existe et vaut 1. Ce qui se réécrit :

$$\boxed{W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n.}$$

À l'aide de la question 3.(b) à présent, on a pour tout $n \geq 0$:

$$(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$$

avec la question 1. Et avec l'équivalent de la question précédente, on obtient :

$$nW_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

5. Montrons le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Init. Pour $n = 0$, on a $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et :

$$\frac{0! \times \pi}{2^{0+1} \times (0!)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

D'où la propriété au rang $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété au rang n, et montrons là au rang $n+1$. On a :

$$\begin{aligned} W_{2(n+1)} = W_{2n+2} &\overset{3.(a)}{=} \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} \overset{\text{HR}}{=} \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)^2} \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1} \times (n!)^2} \\ &= \frac{(2n+2)!\pi}{2^2(n+1)^2 \times 2^{2n+1} \times (n!)^2} \\ &= \frac{(2n+2)!\pi}{2^{2(n+1)+1} \times ((n+1)!)^2} \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, on peut donc conclure que $\boxed{\text{pour tout entier } n \geq 0 : W_{2n} = \dfrac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}.}$

6. On effectue un développement limité de a_n :

$$\begin{aligned} -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) &= -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -1 - \left(-1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi on a $a_n \sim \dfrac{1}{12n^2}$. Comme la série $\sum \dfrac{1}{12n^2}$ est à termes positifs et convergente (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), $\boxed{\sum a_n \text{ converge par théorème de comparaison.}}$

7. On a pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\ln(A_n) - \ln(A_{n-1}) &= \ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}(n-1)!}{n!(n-1)^{n-1}e^{-n+1}\sqrt{n-1}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n^{n-1+\frac{1}{2}}e^{-1}}{(n-1)^{n-1+\frac{1}{2}}}\right) \quad \text{car } \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}} \text{ et } n! = (n-1)! \times n \\
&= \ln(e^{-1}) + \ln\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right) \\
&= -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\
&= -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&\boxed{= a_n.}
\end{aligned}$$

8. Pour tout $N \geq 2$, on a :

$$\sum_{n=2}^{N} a_n = \sum_{n=2}^{N} (\ln(A_n) - \ln(A_{n-1})) = \ln(A_N) - \ln(A_1)$$

par télescopage. Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} a_n$ converge, on en déduit que la suite $(\ln(A_N))$ converge également vers une limite $\ell' \in \mathbb{R}$. Par composition avec l'exponentielle qui est une fonction continue, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \ell = e^{\ell'} > 0.}$

9. a) Le résultat de la précédente question donne $A_n \sim \ell$, ce qui se réécrit :

$$\frac{1}{n!} n^n e^{-n}\sqrt{n} \sim \ell \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{\ell} n^n e^{-n}\sqrt{n} \sim n!.}$$

b) De l'équivalent $n! \sim \dfrac{1}{\ell} n^n e^{-n}\sqrt{n}$ on tire, d'une part,

$$(2n)! \sim \frac{1}{\ell}(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n} = \frac{1}{\ell}2^{2n}n^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}$$

et, d'autre part, en multipliant par 2^n et en élevant au carré,

$$(2^n n!)^2 \sim \frac{1}{\ell^2}2^{2n}n^{2n+1}e^{-2n}.$$

Il vient alors

$$\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \sim \frac{\frac{1}{\ell}2^{2n+1}n^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}}{\frac{1}{\ell^2}2^{2n}n^{2n+1}e^{-2n}} \sim \ell\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

soit enfin, en utilisant les résultats des questions 4.(b) et 5 :

$$\ell\frac{\pi}{\sqrt{2n}} \sim W_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}.$$

Ainsi, le quotient de ces deux expressions tend vers 1 ; c'est en fait une constante, car on a :

$$\ell\frac{\pi}{\sqrt{2n}} \div \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \ell\frac{\pi}{\sqrt{2n}} \times \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} = \ell\sqrt{2\pi}$$

ce qui donne finalement $\dfrac{1}{\ell} = \sqrt{2\pi}$. Ainsi, en substituant :

$$\boxed{n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.}$$

Le saviez-vous ?

C'est Abraham de Moivre (1667 -1754) qui a initialement démontré l'équivalent obtenu à la question 9.(a). Le mathématicien écossais James Stirling (1692 - 1770) l'a précisé en montrant que $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ à l'aide des intégrales de Wallis, comme nous l'avons fait en question 9.(b). La formule obtenue :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

est couramment appelée *formule de Stirling*.

Partie II : Étude de variables aléatoires

10. Montrons que f_a est une densité de probabilité.
    - f_a est positive sur $\mathbb{R}$.
    - f_a est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme produit et composées de fonctions qui le sont.
    - Étudions la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x$. La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ étant continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale est généralisée en $+\infty$. Soit $A > 0$. On a :

$$\int_0^A \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x = \left[-e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right]_0^A = 1 - e^{-\frac{A^2}{2a^2}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

    Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

f_a est donc une densité de probabilité.

11. Pour tout $x \leq 0$, on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_a(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0.$$

Pour $x > 0$, on obtient :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_a(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

La fonction de répartition de la variable aléatoire X est donc :

$$F_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

12. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_a(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{t^2}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}}_{\geq 0}\mathrm{d}t$ converge (absolument).

Comme rappelé dans l'énoncé pour vous, cela ressemble fort à une loi normale. On va essayer de faire apparaître la quantité proposée par l'énoncé.

En premier, on constate que l'intégrale proposée par l'énoncé est celle d'une fonction paire, donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t = a\sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t = a\sqrt{2\pi}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

On effectue maintenant une intégration par parties sur le segment $[0, A]$ pour $A > 0$:
BROUILLON :

$u : t \mapsto t$	$v' : t \mapsto \frac{t}{a^2}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$
$u' : t \mapsto 1$	$v : t \mapsto -e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$

AU PROPRE :
Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{t^2}{a^2}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t &= \left[-te^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right]_0^A - \int_0^A 1\times(-e^{-\frac{t^2}{2a^2}})\mathrm{d}t \\ &= -Ae^{-\frac{A^2}{2a^2}} + \int_0^A e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t \quad \text{linéarité de l'intégrale} \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} -0 + a\sqrt{\frac{\pi}{2}} = a\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{croissances comparées et ce qu'on a fait au dessus.}\end{aligned}$$

On récupère donc : $\boxed{E(X) \text{ existe et vaut } a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$

Je vous laisse ci-dessous un autre corrigé écrit par Mathieu Mansuy pour les élèves plus à l'aise avec la loi normale pour les curieux :
Notons que cette intégrale ressemble fortement à celle définissant le moment d'ordre 2 d'une loi normale. Plus précisément, soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathscr{N}(0, a^2)$, qui possède pour densité :

$$t \mapsto \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}.$$

Alors nous savons, par parité de l'intégrande, que :

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t = \frac{2}{a\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t.$$

De plus, $E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = a^2 + 0 = a^2$.
On en déduit que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{a^2}e^{-\frac{t^2}{2a^2}} = a^3\frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Et donc $E(X)$ existe et vaut :

$$E(X) = \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2a^2}} = \frac{1}{a^2}a^3\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\boxed{= a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

13. Par le théorème du transfert, sous réserve de convergence, on a :

$$E\left(X^2\right) = \int_0^{+\infty}t^2f_a(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{t^3}{a^2}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t.$$

Soit $A > 0$. Procédons à une intégration par parties sur le **segment** $[0, A]$.
BROUILLON :

$u : t \mapsto t^2$	$v' : t \mapsto \dfrac{t}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$
$u' : t \mapsto 2t$	$v : t \mapsto -e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$

AU PROPRE :

Les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto -e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$ D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^A t^3 e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \mathrm{d}t &= \left[-t^2 e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right]_0^A + 2\int_0^A t e^{-\frac{t^2}{2a^2}} dt \\ &= -A^2 e^{-\frac{A^2}{2a^2}} + 2\left[-a^2 e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right]_0^A \\ &= -A^2 e^{-\frac{A^2}{2a^2}} + 2a^2 - 2a^2 e^{-\frac{A^2}{2a^2}} \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 2a^2 \quad \text{par croissances comparées}\end{aligned}$$

Et par la formule de Huygens, il vient :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = 2a^2 - a^2\frac{\pi}{2} \boxed{= a^2\frac{4-\pi}{2}.}$$

14. a) Notons que $Z(\Omega) = \mathbf{R}^+$, de sorte que $F_Z(x) = 0$ pour tout $x < 0$.

Soit $x \geq 0$. Il vient :

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(a\sqrt{-2\ln V} \leq x) = P\left(\sqrt{-2\ln V} \leq \frac{x}{a}\right) = P\left(-2\ln V \leq \frac{x^2}{a^2}\right)$$

par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbf{R}_+$. On divise par -2 ce qui change le sens de l'inégalité, puis, par stricte croissance de l'exponentielle, on obtient :

$$F_Z(x) = P\left(\ln V \geq -\frac{x^2}{2a^2}\right) = P\left(V \geq e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) = 1 - P\left(V < e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right)$$

et donc

$$F_Z(x) = 1 - P\left(V \leq e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right)$$

en utilisant que V est à densité. Puisque $V \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$, et que $0 \leq e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \leq 1$, il vient donc :

$$F_Z(x) = 1 - F_V\left(e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

Ainsi, Z a la même fonction de répartition que X, et donc ces deux variables ont même loi.

b) On suppose avoir importé les librairies `numpy` et `numpy.random` à l'aide des préfixes `np` et `rd`. Le programme suivant convient :

```
def simul(a):
    v = rd.random()
    z = a*np.sqrt(-2*np.log(v))
    return z
```

15. Puisque l'urne ne contient que n boules, il faut au maximum $(n+1)$ tirages avant de retirer une boule déjà sortie. Et donc T_n prend ses valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$, de sorte que $\boxed{P(T_n > n+1) = 0}$.

16. Remarquons que pour $k=1$, on a $P(T_n>1)=1$, car T_n est à valeurs dans $[\![2,n]\!]$.
Notons A_i l'événement « la boule obtenue au tirage i n'a pas été tirée auparavant ».
Alors :
$$[T_n>k]=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k.$$
Par la formule des probabilités composées, on a alors :
$$P(T_n>k)=P(A_1)\,P_{A_1}(A_2)\,P_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{k-1}}(A_k).$$
Mais pour tout $\ell\in[\![2,k]\!]$,
$$P_{A_1\cap\cdots\cap A_{i-1}}(A_i)=\frac{n-(i-1)}{n}$$
puisque cette probabilité conditionnelle est la probabilité de tirer une boule qui n'a pas été tirée, sachant qu'on a déjà obtenu $i-1$ boules différentes lors des tirages précédents.
On obtient en substituant dans la formule des probabilités composées :
$$P(T_n>k)=1\times\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-(k-1)}{n}=\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^{k-1}}\boxed{=\frac{n!}{n^k(n-k)!}}.$$

17. Par définition de Y_n, on a :
$$P(Y_n>y)=P\left(\frac{T_n}{\sqrt{n}}>y\right)=P\left(T_n>y\sqrt{n}\right).$$
car $\sqrt{n}>0$. Mais T_n étant à valeurs entières, on a :
$$P(T_n>k_n)=\underbrace{P\left(k_n<T_n\leq y\sqrt{n}\right)}_{=0}+P\left(T_n>y\sqrt{n}\right)\qquad\text{soit}\qquad P(T_n>k_n)=P\left(T_n>y\sqrt{n}\right).$$
Et donc $\boxed{P(Y_n>y)=P(T_n>k_n)}$.

18. Notons que $\sqrt{n}y-1<k_n\leq\sqrt{n}y$ et donc $\dfrac{\sqrt{n}y-1}{y\sqrt{n}}\leq\dfrac{k_n}{y\sqrt{n}}\leq 1$ (on divise par $y\sqrt{n}>0$).
Par le théorème des gendarmes, on a alors $\dfrac{k_n}{y\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$, ce qui se réécrit $k_n\sim y\sqrt{n}$.
En utilisant le résultat de la question 9.b, il vient $n!\underset{n\to+\infty}{\sim}e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}$.
De même, on a $n-k_n\geqslant n-y\sqrt{n}\to+\infty$, et donc :
$$(n-k_n)!\underset{n\to+\infty}{\sim}e^{-(n-k_n)}(n-k_n)^{n-k_n}\sqrt{2\pi(n-k_n)}.$$
On en déduit que :
$$\begin{aligned}P(Y_n>y)&=P(T_n>k_n)\\&=\frac{n!}{n^{k_n}(n-k_n)!}\\&\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^{k_n}}\frac{e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}}{e^{-(n-k_n)}(n-k_n)^{n-k_n}\sqrt{2\pi(n-k_n)}}\\&\underset{n\to+\infty}{\sim}e^{-k_n}\left(\frac{n}{n-k_n}\right)^{n-k_n}\sqrt{\frac{n}{n-k_n}}.\end{aligned}$$
Mais on a
$$\frac{n}{n-k_n}=\frac{n}{n}\frac{1}{1-\frac{k_n}{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$$

car $\dfrac{k_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{y}{\sqrt{n}}$ et donc

$$\sqrt{\frac{n}{n-k_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

par continuité de la racine carrée. Il vient alors :

$$\boxed{P\left(Y_n > y\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-k_n}\left(\frac{1}{1-\frac{k_n}{n}}\right)^{n-k_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-k_n}\left(1-\frac{k_n}{n}\right)^{k_n-n}.}$$

19. a) Nous savons qu'au voisinage de 0 , on a $\ln(1-t) = -t - \dfrac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)$ et donc :

$$\begin{aligned}-t + (1-t)\ln(1-t) &= -t + (t-1)\left(-t - \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)\right)\\ &= -t + t + \frac{t^2}{2} - t^2 + \underbrace{o\left(t^2\right) - \frac{t^3}{2} + o\left(t^3\right)}_{=o(t^2)} \boxed{= -\frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right).}\end{aligned}$$

b) En factorisant par n, il vient :

$$\begin{aligned}-k_n + (k_n - n)\ln\left(1-\frac{k_n}{n}\right) &= n\left(-\frac{k_n}{n} + \left(\frac{k_n}{n}-1\right)\ln\left(1-\frac{k_n}{n}\right)\right)\\ &= n\left(-\frac{k_n^2}{2n^2} + o\left(\frac{k_n^2}{n^2}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{k_n^2}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{y^2}{2}\end{aligned}$$

Et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} -k_n + (k_n - n)\ln\left(1-\frac{k_n}{n}\right) = -y^2/2.}$$

20. Nous savons que pour $x \leq 0$, on a $P\left(Y_n \leq x\right) = 0$ car Y_n est à valeurs strictement positives. Pour $x > 0$, on a, grâce au résultat de la question précédente,

$$P(Y_n \leq y) = 1 - P(Y_n > y) = 1 - e^{-k_n + (k_n-n)\ln(1-\frac{k_n}{n})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-y^2/2}$$

par composition de la limite par l'exponentielle continue. On reconnait alors la fonction de répartition d'une variable aléatoire de densité f_1. Soit X une telle variable aléatoire. On a alors, en tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = F_X(x)$.

Et donc $\boxed{Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X.}$

Remarque. On a ici un exemple d'une suite de variables discrètes qui converge en loi vers une variable à densité.