La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

Ce problème étudie quelques propriétés des endomorphismes cycliques d'un espace vectoriel E de dimension finie, ainsi que la décomposition de Frobenius d'un endomorphisme de E. Dans tout le problème :

— $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels ;

— n est un supérieur ou égal à 2 ;

— E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n ;

— $\mathscr{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E ;

— on rappelle qu'une **homothétie** est une application du type $\lambda\,\mathrm{id}_E$ où λ appartient à $\mathbb{R}$ et id_E est l'application identique (ou identité) de E ;

— un sous-espace vectoriel F de E est dit **stable** par un endomorphisme u de E si, pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$.

On note alors $u_{|F}$, l'endomorphisme de F définit par : $u_{|F} : \begin{cases} F \to F \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$.

Cet endomorphisme est appelé endomorphisme de F **induit** par u ;

— si u est un endomorphisme de E, on définit les puissances de u par récurrence :
$u^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on pose $u^k = u \circ u^{k-1}$;

— si u est un endomorphisme de E et e un vecteur de E, on note $E_u(e)$ le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$E_u(e) = \mathrm{vect}\left(u^k(e) \mid k \in [[0, n-1]]\right) = \mathrm{vect}\left(e, u(e)_{1,\dots,} u^{n-1}(e)\right)$$

Si k est un entier naturel non nul, $\mathscr{B}(e,k)$ désigne la famille $\left(e, u(e), u^2(e), \dots, u^{k-1}(e)\right)$;

— soit $u \in \mathscr{L}(E)$; on dit que u est un **endomorphisme cyclique** s'il existe $e \in E$ tel que $E = E_u(e)$;
on considérera qu'en dimension 1, tout endomorphisme est cyclique ;

— soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$; on dit que A est une **matrice de Frobenius** ou une **matrice compagnon** s'il existe des scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ tels que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Le polynôme $P_A(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1 X - a_0$ est appelé **polynôme caractéristique** de A ;

— on dit qu'un endomorphisme u de E est **nilpotent** s'il existe un entier naturel non nul k tel que $u^k = 0$. Dans ce cas, $r = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid u^k = 0\right\}$ est appelé **indice de nilpotence** de u.

Le problème comporte trois parties.

Dans la première partie, on étudie les premières propriétés des endomorphismes cycliques, on traite quelques exemples, en particulier avec Python.

Dans la seconde partie, on étudie le cas des endomorphismes diagonalisables et nilpotents.

Dans la troisième partie, on obtient une décomposition d'un endomorphisme appelée **décomposition de Frobenius** et on en déduit quelques propriétés élémentaires ; on montre en particulier que toute matrice carrée réelle est semblable à sa transposée.

Partie I - Premières propriétés

Soit u un endomorphisme de E et e un vecteur non nul de E.

Section A - Étude des sous-espaces $E_u(e)$

1. Justifier que la famille $\mathscr{B}(e, n+1)$ est liée.
2. On note $d(e) = \max\{k \in \mathbb{N}^* \mid \mathscr{B}(e,k) \text{ est libre }\}$; justifier l'existence de $d(e)$.
3. Montrer qu'il existe des scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_{d(e)-1}$ tels que :

$$u^{d(e)}(e) = a_0 e + a_1 u(e) + a_2 u^2(e) + \cdots + a_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^i(e)$$

   Montrer alors que pour tout entier k supérieur ou égal à $d(e)$, le vecteur $u^k(e)$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\big(e, u(e), u^2(e), \ldots, u^{d(e)-1}(e)\big)$.
   En déduire que $\mathscr{B}(e, d(e))$ est une base de $E_u(e)$.
4. Montrer que $E_u(e)$ est stable par l'endomorphisme u.
   Montrer également que tout sous-espace vectoriel F de E contenant e et stable par l'endomorphisme u contient $E_u(e)$.
5. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur l'entier $d(e)$, le vecteur e est-il un vecteur propre pour u ?
6. Montrer que u est une homothétie si et seulement si pour tout vecteur *non nul* de E, on a $d(e) = 1$.
7. Montrer que u est un endomorphisme cyclique si et seulement s'il existe un vecteur *non nul* de E tel que $d(e) = n$.

Section B - Premières propriétés des endomorphismes cycliques

On suppose dans cette section que u est un endomorphisme cyclique de E et donc qu'il existe un vecteur non nul e de E tel que $E = E_u(e)$.

8. On note A la matrice de u dans la base $\mathscr{B}(e, n)$ de E ; vérifier que A est une matrice de Frobenius.
9. On note $P_A(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1 X - a_0$ son polynôme caractéristique.
   Que vaut $\big(P_A(u)\big)(e)$?
   Calculer $\big(P_A(u)\big)\big(u^k(e)\big)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Montrer que P_A est un polynôme annulateur de u.
10. Vérifier que la famille $\big(\mathrm{Id}_E, u, u^2, \ldots, u^{n-1}\big)$ est libre dans $\mathscr{L}(E)$.
11. En déduire que P_A est un polynôme annulateur non nul de u de degré minimal.
12. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est valeur propre de u si et seulement si λ est racine de P_A et vérifier que le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ est de dimension 1.
13. En déduire une caractérisation portant sur P_A pour que u soit diagonalisable. *Indication : on dit que u est diagonalisable si sa matrice dans une certaine base est diagonale, autrement dit, si la somme des dimensions des espaces propres fait la dimension de l'espace, autrement dit, s'il existe une base de vecteurs propres.*

Section C - Un premier exemple

On suppose dans cette section que $E = \mathbb{R}^3$ et on note $\mathscr{B}_3$ la base canonique de E.

On note aussi f et g les endomorphismes de E dont les matrices dans la base $\mathscr{B}_3$ sont respectivement

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

14. Vous pourrez justifier plus tard que f est diagonalisable comme toutes les matrices symétriques. On notera λ_1, λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ les valeurs propres de f rangées par ordre croissant.
15. Déterminer (V_1, V_2, V_3) une base de diagonalisation de f telle que pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $f(V_i) = \lambda_i V_i$ et telle que la première coordonnée du vecteur V_i dans la base $\mathscr{B}_3$ soit 1.
16. On pose $V = V_1 + V_2 + V_3$; déterminer $d(V)$ et en déduire que f est cyclique.
17. Déterminer un polynôme annulateur non nul de g de degré minimal.
    L'endomorphisme g est-il cyclique ?
18. Vérifier que (V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres de g.

Section D - Avec Python

On va étudier une méthode qui va implémenter en `Python` la caractérisation vue à la question 13. On pourra utiliser les quelques notions de `Python` données ci-dessous :

— Les fonctions spécifiques aux polynômes sont dans le sous-module `numpy.polynomial.polynomial`, qu'on importera avec le préfixe `nppol`. On supposera avoir importé les librairies suivantes :

```
import numpy as np
import numpy.polynomial.polynomial as nppol
```

— on crée un polynôme `p` à l'aide d'un vecteur contenant la suite de ses coefficients. Par exemple, le polynôme $p : x \mapsto 2 - 3x + x^3$ est défini par `p=np.array([2,-3,0,1])` ;

— pour évaluer un polynôme `p` en une valeur `x`, on utilise `nppol.polyval(x,p)` ;

— on peut effectuer des tests de comparaison avec `==`, `<=`, `>=`, `<`, `>`,ou `<>`.
Par exemple, si `x` est une variable de type numérique, l'instruction `x>=0` renvoie le booléen `True` (ou vrai) si `x` est positif ou nul et le booléen `False` (ou faux) si `x` est strictement négatif ;

— les fonctions `np.max`, `np.sum`, `np.abs` permettent de calculer respectivement le maximum, la somme et la valeur absolue des éléments d'un vecteur (on renvoie un vecteur pour la fonction `np.abs`) ;

— la commande `np.shape(v)[0]` renvoie la taille d'un vecteur ligne `v`.

Dans cette section, on propose une méthode approximative permettant de tester si un polynôme réel de degré n admet exactement n racines réelles distinctes. L'idée de la méthode est de partir d'un réel en deçà duquel on est sûr que le polynôme ne s'annule pas. Par un parcours de gauche à droite, on va tester le signe du polynôme et si l'on rencontre n changement de signes, on saura que le polynôme admet n racines réelles. Dans le cas contraire, on renverra une valeur d'indétermination.

19. Justifier que si un polynôme P de degré n est tel qu'il existe $n+1$ réels $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$ tels que $P(x_k) P(x_{k+1}) < 0$ pour $k \in [\![1, n]\!]$, alors P admet n racines distinctes.

20. Montrer que si $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ est un polynôme à coefficients réels et si z est un réel tel que $P(z) = 0$, alors $|z| \leq \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)$ (on pourra montrer que si $|z| > 1$, alors $|z| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$).

    Dans la suite, on notera m le réel $\max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)$.

21. Écrire une fonction `racSimpApprox` qui appliquée au vecteur ligne `coeff` représentant les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ du polynôme $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et au réel `pas`, renvoie le booléen `True` si cette fonction `Python` détecte n changements de signe en partant de `-m-pas/2` et en testant les valeurs de pas en pas jusqu'à dépasser `m+pas/2`.
    Dans le cas où l'on ne rencontre pas n changements de signe, la fonction renverra la chaîne de caractères `"ind"`.

22. Comment utiliser cette fonction pour tester si une matrice de Frobenius est diagonalisable ou non ?
    Expliquer dans quel(s) cas la fonction renvoie la valeur indéterminée `"ind"`.

Partie II - Étude de deux cas particuliers

Section A - Endomorphismes diagonalisables qui sont cycliques

Dans cette section, on considère un endomorphisme u de E et on suppose que u est diagonalisable.

On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ une liste des valeurs propres distinctes de u.

23. En considérant son action sur une base de vecteurs propres de u, établir que l'endomorphisme $(u - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \circ (u - \lambda_2 \mathrm{id}_E) \circ \cdots \circ (u - \lambda_p \mathrm{id}_E)$ est l'endomorphisme nul.

24. En déduire que la famille $\left(\mathrm{id}_E, u, u^2, \ldots, u^p\right)$ est liée dans $\mathscr{L}(E)$.

25. Quelle est la valeur de p si u est cyclique ?

    On suppose jusqu'à la fin de cette section que $p = n$, et on note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

26. Soit $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$. Montrer que la famille $\mathscr{B}(e, n)$ est libre et conclure que u est cyclique.

27. On reprend dans cette question seulement l'exemple de la section C de la partie I et, pour α réel, on note $u_\alpha = g + \alpha f$.
    Montrer que u_α est diagonalisable et discuter, suivant les valeurs de α, les cas où u_α est cyclique.

Section B - Endomorphismes nilpotents qui sont cycliques

Dans cette section, u est un endomorphisme nilpotent de E d'indice de nilpotence r.

28. Soit $e \in E$ tel que $u^{r-1}(e) \neq 0_E$; montrer que la famille $\left(e, u(e), \ldots, u^{r-1}(e)\right)$ est libre dans E.

29. En déduire que $r \leq n$ et montrer que $r = n$ si et seulement si u est cyclique.
    Dans le cas $r = n$, écrire la matrice de u dans la base $\mathscr{B}(e, n)$.

Section C - Un second exemple

Dans cette section, E est le sous-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note X^k la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^k$ de E et on rappelle que $\left(X^k\right)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ constitue une base de E.

30. Soit $P \in E$; montrer que pour tout x reel, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge et montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ appartient à E.

On note $u : P \in E \mapsto u(P)$ défini par : $\quad \forall x \in \mathbf{R}, u(P)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$

31. Vérifier que u est un endomorphisme de E.
32. Soit $P \in E$; à l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u(P)(x) = P(x) + u\left(P'\right)(x)$$

où P' désigne la dérivée de P.

33. En déduire que pour tout $P \in E$, $u(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)}$ où, pour $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}$ désigne la dérivée k^{eme} de P.
34. Soit $P \in E$; à l'aide d'un changement de variable, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u(P)(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P(s)\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s.$$

35. Montrer que pour tout $P \in E$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} P(s)\mathrm{e}^{-s}ds$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer alors que $u(P)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que $(u(P))' = u(P) - P$.
En déduire que $(u(P))' = u\left(P'\right)$.

36. Déterminer la matrice de u dans la base $\left(X^k\right)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ de E et en déduire le spectre de u.
37. On pose $v = u - \mathrm{id}_E$; montrer que $\mathrm{Im}(v)$ est le sous-espace vectoriel de E, constitué des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à $n-2$.
38. Montrer que v est nilpotent. L'endomorphisme v est-il cyclique ?

Partie III - Décomposition de Frobenius et applications

On se propose de démontrer, pour tout endomorphisme u de $\mathscr{L}(E)$, la propriété suivante notée $(\mathscr{R})$:

$(\mathscr{R})$ | il existe $p \in [\![1, n]\!]$ et $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels non nuls de E, stables par u, tels que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$ et vérifiant : pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $u_{|F_i}$ est un endomorphisme cyclique de F_i.

Section A - Cas d'une homothétie

39. Démontrer que la propriété $(\mathscr{R})$ est réalisée si u est une homothétie.

Section B - Cas où u n'est pas une homothétie

40. Justifier qu'il existe e vecteur non nul de E tel que $d(e) \neq 1$.

Pour le reste de cette section, on choisit un vecteur non nul e de E tel que $d = d(e)$ soit maximal (donc $d \geq 2$) et on note, pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$, $e_k = u^k(e)$. On note toujours $\mathscr{B}(e,d) = (e_0, e_1, \ldots, e_{d-1})$ ainsi que $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}$ les scalaires tels que $u^d(e) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(e)$. Enfin, on note $F_1 = E_u(e)$.

41. Justifier que la propriété $(\mathscr{R})$ est réalisée si $d = n$.

Dans la suite de cette section, on suppose que $d \in [\![2, n-1]\!]$ (et donc $n \geq 3$).
On complète la famille $\mathscr{B}(e,d)$ en une base $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_{d-1}, e_{d,\ldots}, \ldots, e_{n-1})$ de E.

42. Démontrer que l'application $\varphi : x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k \in E \mapsto x_{d-1}$ est une forme linéaire non nulle de E.

On considère l'application $\Phi : x \in E \mapsto \left(\varphi\left(u^{d-1}(x)\right), \varphi\left(u^{d-2}(x)\right), \ldots, \varphi(u(x)), \varphi(x)\right) \in \mathbb{R}^d$.

43. Vérifier que Φ est linéaire.

On note $G = \mathrm{Ker}(\Phi)$ et $\tilde{\Phi}$ la restriction de Φ à F_1.

44. Calculer $\Phi(e_0) = \Phi(e)$ et $\Phi(e_1) = \Phi(u(e))$.
Plus généralement, justifier que pour tout $k \in [\![1, d-1]\!]$; il existe une famille de scalaires $(\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, \ldots, \beta_{k-1,k}) \in \mathbb{R}^k$ telle que $\Phi(e_k) = (\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, \ldots, \beta_{k-1,k}, 1, 0, \ldots, 0)$.

45. Écrire alors la matrice de l'application $\tilde{\Phi}$ dans les bases $\mathscr{B}(e,d)$ de F_1 et la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et justifier que $\tilde{\Phi}$ est bijectif.

46. Montrer alors que $E = F_1 \oplus G$ et justifier que G est stable par u.

47. Dire pourquoi $u_{|F_1}$ est bien un endomorphisme cyclique de F_1.

48. Justifier que pour tout vecteur non nul e' de G, $d(e') \leq d$.

49. Démontrer que la propriété $(\mathscr{R})$ est réalisée.

Section C - Première application : décomposition de Jordan des endomorphismes nilpotents

49. Soit u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $p \in [\![1, n]\!]$ et $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E non nuls et stables par u, tels que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$.
Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on note $\mathscr{B}_{F_k}$ une base de F_k.
Soit $\mathscr{B}$ la concaténation des bases $\mathscr{B}_{F_1}, \mathscr{B}_{F_2}, \ldots, \mathscr{B}_{F_p}$. On rappelle que $\mathscr{B}$ est une base de E.
Quelle est la forme de la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$?

Dans la suite de cette section, u est un endomorphisme nilpotent de E d'indice p.

50. Montrer, à l'aide de la propriété $(\mathscr{R})$, qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice $T = (t_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de u est triangulaire inférieure et telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $t_{i,i} = 0$, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $t_{i,i-1} \in \{0, 1\}$, et tous les autres coefficients de T sont nuls.

Section D - Deuxième application : toute matrice carrée est semblable à sa transposée

Dans cette section, $E = \mathbb{R}^n$. On note $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à M, c'est-à-dire tel que la matrice de u dans la base $\mathscr{B}_n$ est M.

On se propose de montrer que M vérifie la propriété $(\mathscr{S})$:

($\mathscr{S}$) | il existe deux matrices symétriques V et W de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec W inversible telles que $M = VW$ |

51. *Cas où u est cyclique :* il existe donc $e \in E$ tel que $E = E_u(e)$; on note toujours $\mathscr{B}(e,n)$ la base $\left(e, u(e), u^2(e), \dots, u^{n-1}(e)\right)$ de E et $A = M_{\mathscr{B}(e,n)}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathscr{B}(e,n)$: il s'agit de la matrice de Frobenius associée aux scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On considère :

$$S = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ -a_2 & -a_3 & \cdots & \ddots & -a_{n-1} & 1 & 0 \\ -a_3 & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ -a_{n-2} & -a_{n-1} & \ddots & \ddots & (0) & & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & 0 & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de E tel que S est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}(e,n)$. On a donc :

$$f(e) = -\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k u^{k-1}(e)\right) + u^{n-1}(e) \qquad f(u(e)) = -\left(\sum_{k=2}^{n-1} a_k u^{k-2}(e)\right) + u^{n-2}(e)$$

et plus généralement :

$$\forall j \in [\![0, n-2]\!] \quad f\left(u^j(e)\right) = -\left(\sum_{k=j+1}^{n-1} a_k u^{k-j-1}(e)\right) + u^{n-j-1}(e)$$

et enfin $f\left(u^{n-1}(e)\right) = e$.

Calculer $u(f(e)), u(f(u(e)))$ et plus généralement, pour tout $j \in [\![0, n-2]\!], u\left(f\left(u^j(e)\right)\right)$ et enfin $u\left(f\left(u^{n-1}(e)\right)\right)$.

En déduire que $AS = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 0 & -a_3 & -a_4 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & (0) & \\ 0 & -a_{n-1} & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On notera S_1 cette matrice AS.

52. Justifier que S est inversible ; on note $S_2 = S^{-1}$ et on a donc $A = S_1 S_2$ où S_1 et S_2 sont deux matrices symétriques réelles.
53. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_n$ vers la base $\mathscr{B}(e,n)$; vérifier que $M = PS_1\left({}^tP\right)\left({}^tP\right)^{-1}S_2P^{-1}$ et conclure que M vérifie la propriété $(\mathscr{S})$.
54. Montrer alors que ${}^tM$ et M sont semblables ; plus précisément, déterminer une matrice symétrique réelle inversible Q telle que ${}^tM = Q^{-1}MQ$.
55. Cas général : En s'appuyant sur le cas précédent et la propriété $(\mathscr{R})$, montrer que pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices M et ${}^tM$ sont semblables.

Partie I - Premières propriétés

Section A - Étude des sous-espaces $E_u(e)$

1. $\mathcal{B}(e,n+1) = \left(e, u(e), u^2(e), \ldots, u^{n+1-1}(e)\right)$ famille de $n+1$ vecteurs.
   Et comme $\dim(E) = n$, cette famille est liée
2. Comme $\dim(E) = n$, le cardinal maximal d'une famille libre de E est n.
   $\mathcal{B}(e,k)$ comprends k vecteurs.
   Donc$\{k \in \mathbb{N}^* \mid \mathcal{B}(e,k)$ est libre $\}$, ensemble d'entiers, est non vide (1 en est élément car $e \neq 0$) et majoré par n, donc il a un maximum.
   et $d(e) = \max\{k \in \mathbb{N}^* \mid \mathcal{B}(e,k)$ est libre $\}$ existe
3. Par définition de $d(e)$, $\mathcal{B}(e,d(e)+1) = \left(e, u(e), u^2(e), \ldots, u^{d(e)}(e)\right)$ est liée. Il existe donc $(b_0, \ldots, b_{d(e)}) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que :

$$b_0 e + b_1 u(e) + \cdots + b_{d(e)-1}u^{d(e)-1}(e) + b_{d(e)}u^{d(e)}(e) = 0_E.$$

   Supposons $b_{d(e)} \neq 0$. Alors :

$$b_0 e + b_1 u(e) + \cdots + b_{d(e)-1}u^{d(e)-1}(e) = 0_E$$

   et par liberté de la famille $\left(e, u(e), u^2(e), \ldots, u^{d(e)-1}(e)\right)$, $(b_0, \ldots, b_{d(e)-1})$ serait nul, ce qui est impossible car $(b_0, \ldots, b_{d(e)}) \neq (0, \ldots, 0)$. Ainsi, $b_{d(e)} \neq 0$, et quitte à diviser par $b_{d(e)}$, on obtient :

$$u^{d(e)}(e) = -\frac{1}{b_{d(e)}}\left(b_0 e + b_1 u(e) + \cdots + b_{d(e)-1}u^{d(e)-1}(e)\right).$$

   Ainsi $u^{d(e)}(e)$ est combinaison linéaire des précédents.

   Donc, il existe des scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_{d(e)-1}$ tels que : $u^{d(e)}(e) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^i(e)$

   Par récurrence, montrons que, pour tout $k \geq d(e)$, $u^k(e)$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}(e,d(e))$. $\geq d(e)$
   C'est vrai pour $k = d(e)$.
   Soit $k \geq d(e)$ pour lequel il existe des scalaires $a_0, \cdots, a_{d(e)-1}$ tels que $u^k(e) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^i(e)$.

Alors $u^{k+1}(e) = u\left(u^k(e)\right) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^{i+1}(e) = \sum_{j=0}^{d(e)-1} a_{j-1}u^j(e) + a_{d(e)-1}u^{d(e)}(u)$

Et comme $u^{d(e)}(u)$ est lui même combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}(e, d(e))$, c'est également le cas pour $u^{k+1}(e)$.
Donc,

$\boxed{\forall k \geq d(e),\ u^k(e) \text{ est combinaison linéaire des vecteurs de } \left(e, u(e), u^2(e), \ldots, u^{d(e)-1}(e)\right)}$

$E_u(e) = E_u(e) = \text{vect}\left(u^k(e) \mid k \in [[0, n-1]]\right)$ et $d(e) \leqslant n$ donc la famille $\mathcal{B}(e, d(e))$ est une famille de vecteurs de $E_u(e)$.
Tous les vecteurs de la famille génératrice de $E_u(e)$ sont combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{B}(e, d(e))$.
Donc $\mathcal{B}(e, d(e))$. est une famille génératrice de $E_u(e)$.
Enfin, par définition de $d(e)$, cette famille est libre.
Donc $\boxed{\mathcal{B}(e, d(e)) \text{ est une base de } E_u(e).}$

4. Soit $x \in E_u(e) = \text{Vect}\left(\left(u^k(e)\right)_{k\in[[0,d(e)-1]]}\right)$ d'après la question 3.

   Donc, par linéarité de u, $u(x) \in \text{Vect}\left(\left(u^{k+1}(e)\right)_{k\in[[0,d(e)-1]]}\right) = \text{Vect}\left(u^k(e)_{k\in[[1,d(e)-1]]}, u^{d(e)}(u)\right)$
   Et comme d'après 3. $u^{d(e)}(e)$ est combinaison linéaire de $\mathcal{B}(e, d(e))$, $u(x)$ l'est également.
   Donc $u(x) \in E_u(e)$ et $\boxed{E_u(e) \text{ est stable par l'endomorphisme } u.}$
   Soit F stable par u, contenant e, alors, par récurrence immédiate, pour tout $k \in [[0, d(e)-1]]$, $u^k(e) \in F$, donc, par stabilité de F par combinaison linéaire, $E = \text{Vect}(\mathcal{B}(e, d(e))) \subset F$.
   Donc $\boxed{E_u(e) \subset F}$

5. Si e est vecteur propre alors$e$ est non nul donc (e) est libre
   et $u(e)$ est proportionnel à e donc $(e, u(e))$. Donc $d(e) = 1$.
   Réciproquement, si $d(e) = 1$ alors (e) est libre donc $e \neq 0$ et $(e, u(e))$ est liée, et comme $e \neq 0$, $u(e)$ est propotionnel à e, donc e est vecteur propre.
   Finalement, $\boxed{e \text{ est vecteur propre} \iff d(e) = 1}$

6. Si u est une homotétie de rapport λ alors, pour tout $e \in E$: $u(e) = \lambda e$ donc tout vecteur non nul de E est vecteur propre et $d(e) = 1$.
   Réciproquement ,si, pour tout vecteur non nul de E. $d(e) = 1$, alors, tout vecteur non nul de E est vecteur propre.
   Montrons, par l'absurde, que la valeur propre est la même pour tous les vecteurs de E.
   Soient x et y vecteurs propres associés à λ et μ distincts alors (x, y) est libre.
   Donc $x + y$ est non nul.
   Il est donc (hypothèse de cette question) lui même associé à un scalaire ν.
   Donc, $u(x + y) = \nu(x + y)$ et par linéarité de u, $u(x + y) = \lambda x + \mu y$.
   La famille (x, y) étant libre , par unicité de la déconposition $\nu = \lambda$ et $\nu = \mu$ donc $\lambda = \mu$, absurde.
   Donc tous les vecteurs non nuls de E sont associés à une même valeur propre et $\boxed{u \text{ est une homotétie.}}$

7. u est un endomorphisme cyclique signifie qu'il existe $e \in E$ tel que $E = E_u(e)$.
   $\boxed{\Leftarrow}$ Si il existe un vecteur non nul de E tel que $d(e) = n$ alors d'après la question 3. $\mathcal{B}(e, d(e)) = \mathcal{B}(e, n)$ est une base de $E_u(e)$.
   Or $\mathcal{B}(e, n)$ est une famille de n vecteurs donc $\dim(E_u(e)) = n$.
   De plus $E_u(e) \subset E$. Donc $E_u(e) = E$ et u est un endomorphisme cyclique.
   $\boxed{\Rightarrow}$ Si u est cyclique, alors il existe $e \in E$ tel que $E_u(e) = E$ et $\dim(E_u(e)) = n$ donc la base $\mathcal{B}(e, d(e))$ de $E_u(e)$ doit contenir n vecteurs.
   donc $d(e) = n$. Et

   $\boxed{u \text{ est cyclique si et seulement s'il existe un vecteur non nul de } E \text{ tel que } d(e) = n}$

Section B - Premières propriétés des endomorphismes cycliques

8. Comme u est cyclique, $d(e) = n$ et $\mathcal{B}(e, n)$ est bien une base de $E = E_u(e)$.
   $\mathcal{B}(e, n) = \left(u^k(e)\right)_{k \in [[0, n-1]]}$.
   Pour tout $k \in [[0, n-2]]$: $u^k(e)$ est le $k+1^{ème}$ vecteur de la base.
   $u\left(u^k(e)\right) = u^{k+1}(e) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i u^i(e)$ avec $x_i = 0$ si $i \neq k+1$ et 1 si $i = k+1$, d'où ses coordonnées $(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots 0)$ avec le 1 en $k+2^{ème}$ position.
   et $u\left(u^{n-1}(e)\right) = u^n(e) \in E$ donc est combinaison linéaire des vecteurs de la base. Donc il existe $(a_k)_{k \in [[0, n-1]]}$ coordonnées de $u^n(e)$ dans la base $B(e, n)$.

   $\boxed{\text{Donc } A = \underset{\mathcal{B}(e,n)}{\text{mat}}(u) \text{ est une matrice de Frobenius.}}$

9. $(P_A(u))(e) = u^n(e) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(e)$.
   Les $(a_k)_{k \in [[0, n-1]]}$ étant les coordonnées de $u^n(e)$ sur la base $\left(u^k(e)\right)_{k \in [[0, n-1]]}$ on a donc $\boxed{(P_A(u))(e) = 0}$
   Pour $k \in [[1, n-1]]$: comme polynôme en u, $P_A(u)$ et u^k comutent donc

   $$(P_A(u))\left(u^k(e)\right) = \left(P_A(u) \circ u^k\right)(e) = \left(u^k \circ P_A(u)\right)(e) = u^k(P_A(u)(e)) = u^k(0) = 0$$

   par linéarité de u.
   Donc $(P_A(u))$ est nul sur la base $\mathcal{B}(e, n)$,.donc $P_A(u) = 0$ et $\boxed{P_A \text{ est un polynôme annulateur de } u.}$

10. Soit $(\alpha_k)_{k \in [[0, n-1]]}$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k = 0$ alors $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(e) = 0$.
    Et comme $\left(u^k(e)\right)_{k \in [[0, n-1]]}$ est libre (dans E), pour tout k, $a_k = 0$.
    Donc $\boxed{\text{la famille } \left(\text{Id}_E, u, u^2, \ldots, u^{n-1}\right) \text{ est libre dans } \mathcal{L}(E).}$

11. P_A est un polynôme annulateur de u.
    P_A est non nul car son terme dominant est X^n.
    Si un $P = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k X^k$ avec $d < n$ est un polynôme annulateur de u alors $\sum_{k=0}^{d} \alpha_k u^k(e) = 0$
    et comme la famille $\left(u^k(e)\right)_{k \in [[0, d]]}$, sous famille de $\left(u^k(e)\right)_{k \in [[0, n-1]]}$, est libre alors tous les coefficients sont nuls, donc P est nul.

Donc le degré minimum d'un polynôme annulateur non nul est supérieur ou égal à n
P_A est, lui, de degré n.

Et $\boxed{P_A \text{ est un polynôme annulateur non nul de } u \text{ de degré minimal.}}$

12. $\boxed{\Rightarrow}$ Par théorème, avec P_A annulateur de u, $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\text{racines de } P_A\}$
$\boxed{\Leftarrow}$ Si λ est racine de P_A alors P_A est divisible par $X-\lambda$ et il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ non nul, tel que $P = (X-\lambda)Q$
Si λ n'est pas valeur propre alors $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est bijective.
On a donc $0 = P_A(u) = (X-\lambda)Q(u) = (u-\lambda\,\mathrm{id}) \circ Q(u)$ donc $Q(u) = (u-\lambda\,\mathrm{id})^{-1} \circ 0 = 0$
Et Q est un polynôme annulateur de u, non nul, de degré $n-1$ ce qui est contraditoire avec 11.
Donc λ est valeur propre de u.
$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } u \text{ si et seulement si } \lambda \text{ est racine de } P_A}$
Le sous espace propre de u associé à la valeur propre λ est de même dimension que celui de sa matrice A.

$$\text{Or } A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}$$

Les $n-1$ colonnes étant échelonnées, $\mathrm{rg}(A-\lambda I) \geq n-1$ donc par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}\ ((A-\lambda I))) \leq 1$.
Donc, si λ est valeur propre de u, donc de A, $1 \leq \dim(\mathrm{Ker}\ ((A-\lambda I))) \leq 1$ et
les sous espaces propres de u sont tous de dimension 1.

13. P_A est un polynôme de degré n.
D'après le 12., les sous espaces propres de u sont de dimension 1.
u est diagonalisable, si et seulement si la somme des dimensions des sous espaces propres est n.
Donc u diagonalisable si et seulement si u a n valeurs propres distinctes.
Donc $\boxed{u, \text{ cyclique, diagonalisable si et seulement si } P \text{ a } n \text{ racines distinctes dans } \mathbb{R}.}$

Section C - Un premier exemple

14. F est symétrique réelle donc diagonalisable.
Donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

15. Soit $V = (x, y, z)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$V \in \mathrm{Ker}\ (f - \lambda\,\mathrm{id}) \iff (f - \lambda\,\mathrm{id})(V) = 0$$
$$\iff \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\lambda x + z = 0 \\ -\lambda y - z = 0 \\ x - y - (1+\lambda) z = 0 \end{cases}$$
$$\iff (1) \begin{cases} z = \lambda x \\ -\lambda(y+x) = 0 \\ (1-(1+\lambda)\lambda) x - y = 0 \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$: $(1) \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$ et les solutions sont Ker $(f - 0\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\,((1,1,0)) \neq \{0\}$ donc 0 est valeur propre associé à $E_0 = \mathrm{Vect}\,((1,1,0))$.

Si $\lambda \neq 0$: $(1) \iff (2) \begin{cases} z = \lambda x \\ y = -x \\ (2 - (1+\lambda)\,\lambda)\,x = 0 \end{cases}$ avec $(\cdots) = -\lambda^2 - \lambda + 2$ qui a pour racines 1 et -2.

Si $\lambda = 1 \neq 0$: $(2) \iff \begin{cases} z = x \\ y = -x \end{cases}$ et Ker $(f - 1\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\,((1,-1,1)) \neq \{0\}$ donc 1 est valeur propre associé à $E_1 = \mathrm{Vect}\,((1,-1,1))$

Si $\lambda = -2 \neq 0$: $(2) \iff \begin{cases} z = -2x \\ y = -x \end{cases}$ et Ker $(f - 1\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\,((1,-1,-2)) \neq \{0\}$ donc -2 est valeur propre associé à $E_{-2} = \mathrm{Vect}\,((1,-1,-2))$

f ayant trois valeurs propres distinctes et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, la juxtaposition d'un vecteur propre associé à chaque valeur propre forme une base de vecteurs propres.

Avec l'ordre croissant des valeurs propres demandé, $\boxed{V_1 = (1,-1,-2)\,,\, V_2 = (1,1,0) \text{ et } V_3 = (1,-1,1)}$ dont les premières coordonnées dans la base canonique est bien 1.

Variante : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc, avec $V_1 = (1,-1,-2) \neq 0$, $f(V_1) = -2V_1$ donc -2 est valeur propre de f et V_1 est un vecteur propre associé dont la première coordonnée est 1.

De même, avec $V_2 = (1,1,0) \neq 0$, $f(V_2) = 0V_2$ et 0 est valeur propre et

avec $V_3 = (1,-1,1) \neq 0$, $f(V_3) = 1V_3$.

Donc $-2, 0$, et 1 sont des valeurs propres distinctes de f, qui en a au plus 3, ce sont donc les valeur propres de f.

Comme elles sont distinctes, la juxtaposition (V_1, V_2, V_3) est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

16. $V = V_1 + V_2 + V_3$, $d(V)$ est calculé ici pour $u = f$.

$f(V) = f(V_1) + f(V_2) + f(V_3)$ par linéarité de f et

$f(V) = -2V_1 + V_3$

$f^2(V) = 4V_1 + V_3$

Soit $\mathcal{C} = (V_1, V_2, V_3)$ base de $\mathbb{R}^3$, par Gauss,

$$\mathrm{rg}\left(V, f(V), f^2(V)\right) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} C_2 + 2C_1 \to C_2 \\ C_3 - 4C_1 \to C_3 \end{cases}$$

$$= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ avec } C_3 + C_2 \to C_3$$

$$= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

Donc la famille $\left(V, f(V), f^2(V)\right)$ est libre et, par définition de $d(V) \geq 3$. Et comme $d(V) \leq 3$ 'après 2., $\boxed{d(V) = 3}$

Donc d'après 7. avec $V \neq 0$, $\boxed{f \text{ est cyclique.}}$

17. Les polynômes annulateurs de g ou de G sont les m^mes.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2G$$

Donc $X^2 - 2X$ est annulateur de G

Comme G et I ne sont pas proportionnelles, il n'y a pas de polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à 1.

Donc, $\boxed{X^2 - 2X \text{ est annulateur de degré minimal.}}$

Or, d'après la question 11., si u est un endomorphisme cyclique, P_A,qui est de degré $n = 3$, est annulateur de degré minimal.

Comme ici, le degré minimal d'un polynôme annulateur est 2, $\boxed{g \text{ n'est pas cyclique.}}$

18. $V_1 = (1, -1, -2)$, $V_2 = (1, 1, 0)$ et $V_3 = (1, -1, 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ donc } g(V_1) = 2V_1$$

et de même , $g(V_2) = 0V_2$ et $g(V_3) = 2V_3$

et ces vecteurs sont non nuls donc vecteurs propres de g.

Donc $\boxed{(V_1, V_2, V_3) \text{ est une base de vecteurs propres de } g \text{ associés à } 2,\ 0 \text{ et } 2}$

Section D - Avec Python

19. Si $P(x_k) P(x_{k+1}) < 0$, alors $P(x_k)$ et $P(x_{k+1})$ sont de signe strictment distinct.

P étant continue sur $[x_k, x_{k+1}]$ avec 0 compris entre $P(x_k)$ et $P(x_{k+1})$, P a au moins une racine dans l'intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ (théorème des valeurs intermédiaires)

Les intervalles $]x_k, x_{k+1}[$ pour $k \in [[1, n]]$ étant disjoints,P a donc au moins n racines distinctes.

Et comme $\deg(P) = n$, il en a au plus n.

Donc, $\boxed{\text{dans ces conditions, } P \text{ possède } n \text{ racines distinctes.}}$

20. Si z est un réel tel que $P(z) = 0$ alors

ou bien $|z| \leq 1$ alors $|z| \leq \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)$

ou bien $|z| > 1$ et $z^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ et, comme $z \neq 0$: $z = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{k-(n-1)}$

Donc $|z| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{k-n+1}\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \left|z^{k-n+1}\right|$ par inégalité triangulaire.

Comme $k - n + 1 \leq 0$ alors $|z|^{k-n+1} \leq 1$ pour tout $k \in [[0, n-1]]$, et $|z| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$

Donc, $\boxed{\text{si } z \text{ est un réel tel que } P(z) = 0, \text{ alors } |z| \leq \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)}$

21. Avec un compteur `c`, on compte le nombre de changement de signe :

```
def racSimpApprox(coeff,pas):
    n = np.shape(coeff)[0] #deg du poly
    p = np.ones(n+1)
    p[0:n] = -coeff #on reajuste les coeff de P
    c = 0 #compteur de chgts de signe
    m = np.max(np.array([np.sum(np.abs(p)),1]))
    x = -m-pas/2
    while x<=m+pas/2 :
        if nppol.polyval(x,p)*nppol.polyval(x+pas,p)<0 :
```

```
            c = c+1
        x = x+pas
    if c == n :
        val = True
    else :
        val = "ind"
    return val
```

22. La fonction renvoie "ind" lorsqu'elle n'a pas détecté n changements de signe avec CE pas.
Cela peut être dû au fait qu'il n'y a pas n racines réelles, ou bien au fait qu'il y a plusieurs racines réelles distinctes dans un même pas.
Si `racSimpApprox` renvoie Vrai, alors le polynôme P a n racines réelles dstinctes, donc A est diagonalisable.

Partie II - Étude de deux cas particuliers

Section A - Endomorphismes diagonalisables qui sont cycliques

23. Les endomorphismes $u - \lambda_i \operatorname{id}_E$ commutent.
Donc, pour un vecteur propre V_i associé à la valeur propre λ_i,
$(u - \lambda_1 \operatorname{id}_E) \circ (u - \lambda_2 \operatorname{id}_E) \circ \cdots \circ (u - \lambda_p \operatorname{id}_E) = (u - \lambda_1 \operatorname{id}_E) \circ (u - \lambda_2 \operatorname{id}_E) \circ \cdots \circ (u - \lambda_p \operatorname{id}_E) \circ (u - \lambda_i \operatorname{id}_E)(V_i) = 0$
u est diagonalisable, donc il y a une base de vecteurs propres.
Et, sur cette base de vecteurs propres, cet endomorphisme s'annule.
Donc cet endomorphisme est nul.

24. En développant cette composée, on obtient un polynome en u de degré p, qui est donc une combinaison linéaire nulle de $\left(\operatorname{id}_E, u, u^2, \ldots, u^p\right)$ dont les coefficients ne sont pas tous nuls. (celui de u^p est $1 \neq 0$)
Donc la famille $\left(\operatorname{id}_E, u, u^2, \ldots, u^p\right)$ est liée

25. Si u est cyclique, et diagonalisable, d'après la question 13, il a n valeurs prorpes distinctes.
Donc $p = n$

26. $\mathcal{B}(e,n) = \left(u^k(e)\right)_{k\in[[0,n-1]]} = \left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^k e_i\right)_{k\in[[0,n-1]]}$ par linéarité de u^k pour tout k.
Soit $(\alpha_k)_{k\in[[0,n-1]]} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(e) = 0$ alors $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k\right) e_i = 0$
Donc, ((e_i) famille libre) pour tout i, $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k = 0$ et le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ de degré au plus $n-1$, a n racines $(\lambda_i)_{i\in[[1,n]]}$ distinctes.
Il est donc nul, et pour tout $k \in [[0, n-1]]$, $\alpha_k = 0$.
Donc $\mathcal{B}(e,n)$ est libre de n vecteurs, donc eEst une base de E et $E(e, d(e)) = E$ donc u est cyclique.

27. On avait montré au I.C. que V_1, V_2, V_3 étaient base de vecteurs propres de f (associés à -2,0, et 1)et de g (associés à 2,0 et 2)
Donc, $u_\alpha(V_1) = (g + \alpha f)(V_1) = (2 - 2\alpha) V_1$
$u_\alpha(V_2) = (g + \alpha f)(V_2) = (0 + 0\alpha) V_2 = 0V_2$ et

$u_\alpha(V_3) = (g + \alpha f)(V_3) = (2 + 1\alpha) V_3$
Donc (V_1, V_2, V_3) est également base de vecteurs propres pour $\boxed{u_\alpha \text{ qui est donc diagonalisable.}}$
D'après 25. et 26., un endomorphisme u diagonalisable est cyclique si et seulement si il a n valeurs propres distinctes.
Donc, ici, si $2 - 2\alpha \neq 0$, $2 - 2\alpha \neq 2 + \alpha$ et $2 + \alpha \neq 0$
$2 - 2\alpha \neq 0 \iff \alpha \neq 1$
$2 - 2\alpha \neq 2 + \alpha \iff \alpha \neq 0$
$2 + \alpha \neq 0 \iff \alpha \neq -2$
Et $\boxed{u_\alpha \text{ est cyclique} \iff \alpha \notin \{-2, 0, 1\}}$

Section B - Endomorphismes nilpotents qui sont cycliques

28. Soit $(\alpha_i) \in \mathbb{K}^r$ tel que $\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i u^i(e) = 0$
Par l'absurde : Si les α_i ne sont pas tous nuls, soit $j = \{i \in [[0, r-1]] \ / \ \alpha_i \neq 0\}$
alors $\sum_{i=j}^{r-1} \alpha_i u^i(e) = 0$ et

$$\begin{aligned} 0 &= u^{r-j-1}\left(\sum_{i=j}^{r-1} \alpha_i u^i(e)\right) \\ &= u^{r-j-1}\left(u^j(e)\right) + \sum_{i=j+1}^{r-1} \alpha_i \overbrace{u^{r+i-j-1}}^{\geq r}(e) \\ &= u^{r-1}(e) + \sum_{i=j+1}^{r-1} \alpha_i 0 \end{aligned}$$

car u est nilpotente d'indice r. Ce qui contredit $u^{r-1}(e) \neq 0$.
Donc, pour tous les α_i sont nuls et $\boxed{\text{la famille } \left(e, u(e), \ldots, u^{r-1}(e)\right) \text{ est libre dans } E.}$

29. Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace vectoriel donc $\boxed{r \leq n}$
Si $r = n$, alors, pour ce $e \neq 0$ tel que $u^{n-1}(e) \neq 0$, d'après la quetion précédente, $d(e) = n$ donc u est cyclique.
Réciproquement, si u est cyclique, il existe $e \neq 0$ tel que $d(e) = n$ donc tel que $\left(u^k(e)\right)_{k \in [[0, n-1]]}$ soit libre.
Et pour ce e, $u^{n-1}(e) \neq 0$, donc l'indice de nilpotence $r \geq n$, et comme $r \leq n$, on a bien $r = n$.
Finalement, $\boxed{\text{l'indice de nilpotence } r = n \text{ si et seulement si } u \text{ est cyclique.}}$
Dans ce cas, la matrice dans la base $\mathcal{B}(e, n)$ est une matrice de Frobenius avec $u\left(u^{n-1}(e)\right) = 0$, donc la dernière colonne nulle :

$$\underset{\mathcal{B}(e,n)}{\text{mat}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Section C - Un second exemple

30. Pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{k+1-1} \mathrm{e}^{-t} dt$ converge et vaut $\Gamma(k+1) = k!$

Pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à $n-1$, en développant les $(x+t)^k et$ en regroupant suivant les puissances de t, il existe des fonctions polynômes P_k de degré inférieur ou égal à $n-1$, telles que $P(x+t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P_k(x)\, t^k$ pour tout t et x réels.

Donc, par linéarité d'intégrales convergentes,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} P(x+t)\, \mathrm{e}^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x)\, t^k \mathrm{e}^{-t} dt \ \text{ converge}} \text{ et vaut } \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x)\, k!$$

Donc $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)\, \mathrm{e}^{-t} dt$ est bien

$\boxed{\text{une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à } n-1, \text{ dans } E}$

31. D'après la question précédente, u est une application de E dans E.

Et avec P et Q de E, et $\lambda \in \mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\lambda P + Q)(x+t)\, \mathrm{e}^{-t} dt = \lambda \int_0^{+\infty} P(x+t)\, \mathrm{e}^{-t} dt + \int_0^{+\infty} Q(x+t)\, \mathrm{e}^{-t} dt$ par linéarité d'intégrales convergentes.

Donc $u(\lambda P + Q) = \lambda u(P) + u(Q)$ et u est bien linéaire.

$\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } E.}$

32. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A > 0$: $u(P)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)\, \mathrm{e}^{-t} dt$

avec f et g de classe C^1 sur $[0, A]$:
$f(t) = P(x+t) : f'(t) = P'(x+t)$
$g'(t) = e^{-t} : g(t) = -e^{-t}$
on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^A P(x+t)\, \mathrm{e}^{-t} dt &= \left[-P(x+t)\, e^{-t}\right]_{t=0}^{A} + \int_0^A P'(x+t)\, e^{-t} dt \\ &= -P(x+A)\, e^{-A} + P(x)\, e^0 + \int_0^A P'(x+t)\, e^{-t} dt\end{aligned}$$

et, $P(x+A) = \mathrm{o}\left(e^A\right)$ donc $P(x+A)\, e^{-A} \underset{A \to +\infty}{\to} 0$

Comme P' est polynômiale, d'après 33. $\displaystyle\int_0^{+\infty} P'(x+t)\, e^{-t} dt$ converge et vaut $u(P')(x)$

donc $\displaystyle\int_0^A P(x+t)\, \mathrm{e}^{-t} dt \underset{A \to +\infty}{\to} P(x) + u(P')(x)$ et

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad u(P)(x) = P(x) + u(P')(x)}$

33. On montre par récurrence, que, pour tout $m \in \mathbb{N}$: $u(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} P^{(k)} + u\left(P^{(m+1)}\right)$

Pour $m=0$: $\sum_{k=0}^{0} P^{(k)} + u\left(P^{(0+1)}\right) = P + u\left(P'\right) = u\left(P\right)$ d'après 35.

Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $u(P) = \sum_{k=0}^{m} P^{(k)} + u\left(P^{(m+1)}\right)$ alors

$P^{(m+1)} \in E$ donc d'après 35., $u\left(P^{(m+1)}\right) = P^{(m+1)} + u\left(P^{(m+1)\prime}\right)$

et $u(P) = \sum_{k=0}^{m} P^{(k)} + P^{(m+1)} + u\left(P^{(m+2)}\right) = \sum_{k=0}^{m+1} P^{(k)} + u\left(P^{(m+2)}\right)$

Donc, la propriété est bien vraie pour tout m entier et en particulier pour $m = n-1$ pour lequel $P^{(n)} = 0$ car P est de degré inférieur ou égal à $n-1$.

et, comme $u\left(0\right) = 0$ par linéarité de u, il ne reste que $\boxed{u(P) = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)}}$

34. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\int_0^{+\infty} P\left(x+t\right) \mathrm{e}^{-t} dt$ converge, par changement de variable affine $t = s - x$,

$\int_x^{+\infty} P\left(s\right) \mathrm{e}^{-(s-x)} dt$ converge et est égal à $\int_0^{+\infty} P\left(x+t\right) \mathrm{e}^{-t} dt$.

Et par linéarité d'intégrales convergentes, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad u(P)(x) = \mathrm{e}^{x} \int_x^{+\infty} P(s)\mathrm{e}^{-s} ds}$

35. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\int_x^{+\infty} P(s)\mathrm{e}^{-s} ds = \int_0^{+\infty} P(s)\mathrm{e}^{-s} ds - \int_0^{x} P(s)\mathrm{e}^{-s} ds$

Avec $f : s \mapsto P\left(s\right) e^{-s}$ continue sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^{x} P(s)\mathrm{e}^{-s} ds$ est la primitive de f (qui s'annule en 0)

Donc $x \mapsto \int_x^{+\infty} P(s)\mathrm{e}^{-s} ds$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto -P\left(x\right) e^{-x}$

$u\left(P\right) : x \mapsto \mathrm{e}^{x} \int_x^{+\infty} P(s)\mathrm{e}^{-s} ds$ donc, par produit, $\boxed{u\left(P\right) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u\left(P\right)'\left(x\right) &= e^{x} \int_x^{+\infty} P(s)\mathrm{e}^{-s} ds + e^{x} \times -P\left(x\right) e^{-x} \\ &= u\left(P\right)\left(x\right) - P\left(x\right) \end{aligned}$$

et $\boxed{(u(P))' = u(P) - P}$

On avait vu à 35. que $u(P) = P(x) + u\left(P'\right)$

on donc bien , $\boxed{(u(P))' = u\left(P'\right)}$.

36. Pour tout $k \in [[0, n-1]]$, et $x, t \in \mathbb{R}$

$(x+t)^k = \sum \binom{k}{i} t^{k-i} x^i$ et

$$u\left(X^k\right)\left(x\right) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i \int_0^{+\infty} t^{k-i} e^{-t} dt = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(k-i\right)! x^i = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x^i$$

donc $u\left(X^k\right) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} X^i$ donc la matrice de u dans la base $\mathcal{C} = \left(X^k\right)_{k\in[[0,n-1]]}$ est nulle sous la diagonale et a pour termes diagonaux $\frac{k!}{k!} = 1$

et $\boxed{\underset{\mathcal{C}}{\mathrm{mat}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1!/0! & \cdots & (n-1)!/0! \\ 0 & 1 & & (n-1)!/1! \\ \vdots & (0) & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ matrice triangulaire et $\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$

37. $\underset{\mathcal{C}}{\mathrm{mat}}(u - \mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 1!/0! & \cdots & (n-1)!/0! \\ 0 & 0 & & (n-1)!/1! \\ \vdots & (0) & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée à partir de la seconde colonne.
donc $\mathrm{rg}(v) = n-1$.
D'autre part, les images par v des vecteurs de la base canonique sont tous de degré $\leq n-2$.
Donc $\mathrm{Im}(v) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et $\dim(\mathrm{Im}(v)) = \dim \mathbb{R}_{n-2}[X]$ d'où $\mathrm{Im}(v) = \mathbb{R}_{n-2}[X]$
Donc $\boxed{\mathrm{Im}(v) \text{ est l'ensemble des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à } n-2.}$

38. Pour tout $1 \leq k \leq n-1$, on a $\deg\left(v\left(X^k\right)\right) = k-1$.
Donc, par récurrence avec orédécesseurs, $\deg\left(v^k\left(X^k\right)\right) = 0$ et $v^{k+1}\left(X^k\right) = 0$.
De plus $n \geq k+1$, donc $v^n\left(X^k\right) = 0$, sur la base de $\left(X^k\right)_{k\in[[0,n-1]]}$, et $v^n = 0$ (par linéarité de v^n)
$\boxed{\text{Donc } v \text{ est bien nilpotente.}}$
Et comme $\deg\left(v^{n-1}\left(X^{n-1}\right)\right) = 0$, $v^{n-1}\left(X^{n-1}\right) \neq 0$ donc $v^{n-1} \neq 0$ et $\boxed{v \text{ est nilpotente d'indice } n}$
D'après la question 28. $\boxed{v \text{ est alors cyclique}}$.

Partie III - Décomposition de Frobenius et applications

Section A - Cas d'une homothétie

39. Si u est une homotétie de rapport λ, avec $p = n$, $(v_i)_{i\in[[1,n]]}$ une base de E et $F_i = \mathrm{Vect}(v_i)$ on a $u(v_i) = \lambda v_i$ donc $\mathrm{Vect}(v_i)$ est stable par u et pour tout i, F_i est stable par u.
Comme, pour tout i, (v_i) est une base de F_i et que la juxtaposition des bases des F_i forme une base de E, alors les F_i sont supplémentaires dans E.
Pour tout i, $\left(v_i, u_{|F_i}(v_i)\right)$ est lié donc $d(v_i) = 1 = \dim(F_i)$ donc $u_{|F_i}$ est cyclique
Donc, $\boxed{\text{la propriété } (\mathcal{R}) \text{ est réalisée si } u \text{ est une homothétie.}}$

Section B - Cas où u n'est pas une homothétie

40. À la question 6., on a vu que u est une homotétie si et seulement si $d(e) = 1$ pour tout vecteur e n on nul.
Par contraposée, puisque u n'est pas une homotétie, $\boxed{\text{il existe } e \text{ vecteur non nul de } E \text{ tel que } d(e)}$

41. Si $d(e) = n$, d'après 7. u est cyclique.
Donc avec $p = 1$, en choisissant $F_1 = E$, on a $E = F_1$ non nnul, stable par u, et $u_{|F_1} = u$ cyclique.
$\boxed{(\mathcal{R})) \text{ est réalisée si } d = n.}$

42. φ est une application de E dans $\mathbb{K}$.
$e_{d-1} = \sum_{k \neq d-1} 0e_k + 1e_{d-1}$ donc $\varphi(e_{d-1}) = 1$ et φ est non nulle.
Pour tout $x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=0}^{n-1} y_k e_k$ de E et $\lambda \in \mathbb{K}$,
alors $\lambda x + y = x = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda x_k + y_k) e_k$
et $\varphi(\lambda x + y) = \lambda x_{d-1} + y_{d-1} = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)$.
variante : la $(d-1)^{ème}$ coordonnée de la combinaison $\lambda x + y$ est la combinaison des $(d-1)^{ème}$ coordonnées.
Donc $\varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)$
$\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ est une forme linéaire non nulle de } E.}$

43. Pour tout $k \in [[1, d]]$, $\varphi \circ u^{d-k}$, composée d'applications linéaires, est linéaire.
Donc, pour tout x et $y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda x + y) &= \left(\lambda\varphi \circ u^{d-k}(x) + \varphi \circ u^{d-k}(y)\right)_{k\in[[1,d]]} \\ &= \lambda\left(\varphi \circ u^k(x)\right)_{k\in k\in[[1,d]]} + \left(\varphi \circ u^k(y)\right)_{k\in k\in[[1,d]]} \\ &= \lambda\Phi(x) + \Phi(y)\end{aligned}$$

et $\boxed{\Phi \text{ est bien linéaire.}}$

44. $\Phi(e_0) = \left(\varphi\left(u^{d-1}(e)\right), \varphi\left(u^{d-2}(e)\right), \ldots, \varphi(u(e)), \varphi(e)\right) = (1, 0 \cdots, 0)$
car $\varphi\left(u^k(e)\right) = 0$ si $k \neq d-1$ et $= 1$ si $k = d-1$
$\Phi(e_1) = \Phi(u(e_1)) = \left(\varphi\left(u^d(e)\right), \varphi\left(u^{d-1}(e)\right), \ldots, \varphi(u(e))\right) = \left(\varphi\left(u^d(e)\right), 1, 0, \cdots, 0\right)$
pour tout $k \in [[1, d-1]]$, et pour $j \in [[0, d-1]]$: $\varphi\left(u^{d-j-1}\left(u^k(e)\right)\right) = \varphi\left(u^{d-j-1+k}(e)\right) = 0$ si $d - j - 1 + k \neq d-1$ c'est à dire si $j \neq k$
Donc $\boxed{\text{avec } (\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, \ldots, \beta_{k-1,k}) = \left(\varphi\left(u^{d-1}(e_k)\right), \varphi\left(u^{d-k}(e_k)\right)\right) \text{ on a } \Phi(e_k) = (\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, \ldots, \beta_{k-}}$

45. On a ainsi les coordonnées des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}(e, d)$ de F_1 et
$\boxed{\text{la matrice de } \tilde{\Phi} \text{ de la base } \mathcal{B}(e,d) \text{ de } F_1 \text{ dans la base canonique de } \mathbb{K}^d \text{ est triangulaire, avec diagonale de } 1 \neq 0}$
Cette matrice étant inversible, $\boxed{\tilde{\Phi} \text{ est bijectif.}}$

46. **Supplémentaires :** Puisque $\tilde{\Phi} = \Phi_{|F_1}$ est injective, son noyau est réduit à 0.
Donc, si $x \in F_1 \cap \text{Ker } (\Phi)$ alors $\Phi(x) = 0$ et $x \in F_1$ donc $x \in \text{Ker } \left(\tilde{\Phi}\right)$ et $x = 0$ et F_1 et Ker $(\Phi) = G$ sont en somme directe.
Soit $x \in E$, alors $\Phi(x) \in \mathbb{K}^d$, donc ($\tilde{\Phi}$ surjective), il existe $y \in F_1$ tel que $\tilde{\Phi}(y) = \Phi(x)$
Soit alors $z = x - y$, on a $\Phi(z) = \Phi(x) - \Phi(y) = \Phi(x) - \tilde{\Phi}(y) = 0$ donc $z \in G$
et $x = y + z \in F_1 + G$ donc $E \subset F + G$ et $\underline{E = F + G}$

D'où $\boxed{E = F_1 \oplus G}$

Stablité : (Merci à Noël Magnis) Soit $x \in G = \text{Ker } (\Phi)$, montrons que $u(x) \in G$.
On a $\Phi(x) = \left(\varphi\left(u^{d-k}(x)\right)\right)_{k\in[[1,d]]} = 0$ donc, pour tout $k \in [[1,d]] : \varphi\left(u^{d-k}(x)\right) = 0$.
D'autre part $\Phi(u(x)) = \left(\varphi\left(u^{d-k+1}(x)\right)\right)_{k\in[[1,d]]}$ et $\varphi\left(u^{d-(k-1)}(x)\right) = 0$ pour tout $k-1 \in [[1,d]]$ donc pour tout $k \in [[2,d]]$.
Reste à voir, pour $k=1$, que $\varphi\left(u^d(x)\right) = 0$.
Or $d(e)$ est le cardinal maximal pour tout vecteur, donc $d(x) \leq d(e) = d$.
Et $u^d(x) \in E_u(x) = \text{Vect}\left(x, \cdots, u^{d(x)-1}(x)\right) \subset \text{Vect}\left(\left(u^{d-k}(x)\right)_{k\in[[1,d]]}\right)$.
Et comme leurs images par φ sont nulles, par linéarité de φ, $\varphi\left(u^d(x)\right) = 0$
et $\Phi(u(x)) = 0$ donc $u(x) \in \text{Ker } (\Phi)$.

47. Avec $e \in F_1$ non nul, on a $\mathcal{B}(e,d) = \left(e, \cdots, u^{d-1}(e)\right) = \left(e, \cdots, u_{|F_1}^{d-1}(e)\right)$ base de F_1 donc libre.
Donc $d_{|F_1}(e) \geq d = \dim(F_1)$ et $d_{|F_1}(e) = d$.
Et d'après 7. $\boxed{u_{|F_1} \text{ est bien un endomorphisme cyclique de } F_1.}$

48. e avait été choisi tel que $d(e)$ soit le maximum des $d(x)$ avec $x \in E$ non nul.
Donc $\boxed{\text{pour tout vecteur } e' \in G^* \subset E^*,\ d(e') \leq d(e) = d.}$

49. On procède par récurrence sur la dimension de E.
Si $\dim(E) = 1$, avec $p = 1$, $F_1 = E$, est stable par u qui est une homotétie donc $u_{|F_1} = u$ est cyclique.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que si u est un endomorphisme de E alors $(\mathcal{R})$ est vérifié,
avec E de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$
ou bien u est une homotétie et $(\mathcal{R})$ est vérifiée,
Sinon si $d = n+1$, d'après 44. $(\mathcal{R})$ est réalisé
Sinon si $d < n+1$, d'après 46. et 49., il existe F_1 et G tels que
$E = F_1 \oplus G$, $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F_1)$ donc non réduit à 0,
G stables par u avec $u_{|F_1}$ cyclique.
Comme $\dim(G) < n+1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la restriction de u à G qui se décompose $G = F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$
D'où la réalisation de $(\mathcal{R})$ pour E. Et, par récurrence,
$\boxed{(\mathcal{R}) \text{ est vraie pour tout espace vectoriel } E \text{ de dimension finie et tout } u \in \mathcal{L}(E).}$

Section C - Première application : décomposition de Jordan des endomorphismes nilpotents

50. Pour e un vecteur de $\mathcal{B}_{F_k}$, $u(e) \in F_k$ car F_k est stable. Donc les coordonnées de $u(e)$ sont nulles en dehors de celles sur $\mathcal{B}_{F_k}$.
Et la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs.
Avec $M_k = \underset{\mathcal{B}_{F_k}}{\text{mat}}(u)$ on a $\boxed{\underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_p \end{pmatrix}}$ les 0 étant des matrices rectangulaires nulles.

51. On part de la décomposition issue de $(\mathcal{R})$.
Sur chaque F_i, la restriction de u est donc nilpotente et cyclique.

et d'après 32., il existe alors une base de F_i dans la quelle la matrice de la restriction est nulle en dehors d'une sous diagonale de 1.

La matrice obtenue au 53. est avec de telles matrices M_i, donc nulle en dehors de la sous diagonale où les termes sont 1 (dans la matrice M_i) ou 0 à l'angle de M_i et M_{i+1}.

Section D - Deuxième application : toute matrice carrée est semblable à sa transposée

52. A est la matrice de u et S celle de f donc AS est la matrice de $u \circ f$ sur la base $\mathcal{B}(e,n)$ de E.

Par linéarité de u :

$$\begin{aligned} u(f(e)) &= u\left(-\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k u^{k-1}(e)\right) + u^{n-1}(e)\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{n-1} a_k u^k(e) + u^n(e) = -\sum_{k=1}^{n-1} a_k u^k(e) \end{aligned}$$

Or $u^n(e) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(e) = 0$ (nilpotente d'indice n) donc $\boxed{u(f(e)) = a_0 e}$ dont les coordonénes sont $(a_0, 0 \cdots, 0)$

Puis, directement $\boxed{u(f(u(e))) = -\sum_{k=2}^{n-1} a_k u^{k-1}(e) + u^{n-1}(e)}$

dont les coordonnées sont $(0, -a_2, \cdots, -a_{n-1}, 1)$; et pour tout $j \in [[0, n-2]]$,

$$\begin{aligned} u\left(f\left(u^j(e)\right)\right) &= -\left(\sum_{k=j+1}^{n-1} a_k u^{k-j-1+1}(e)\right) + u^{n-j-1+1}(e) \\ &= -\left(\sum_{k=j+1}^{n-1} a_k u^{k-j}(e)\right) + u^{n-j}(e) \end{aligned}$$

et $u\left(f\left(u^{n-1}(e)\right)\right) = u(e)$

On a alors les coordonnées des images par $u \circ f$ des vecteurs de la base $\mathcal{B}(e,n)$

Donc $\boxed{\underset{\mathcal{B}}{\operatorname{mat}}(e,n)(u \circ f) = AS}$

53. Les colonnes de S étant échelonnées (et non nulles) $\operatorname{rg}(S) = n$ donc $\boxed{S \text{ inversible.}}$

Comme elle est symétrique réelle, son inverse S_2 l'est également.

Enfin $AS = S_1$ d'près la question précédente, est aussi symétrique.

on a donc $A = S_1 S_2$ où S_1 et S_2 sont deux matrices symétriques réelles.

54. $M = \underset{\mathcal{B}_n}{\operatorname{mat}}(u)$ et $P = P_{B_n, B(e,n)}$

et d'après la formule de changement de base, $\underset{\mathcal{B}_n}{\operatorname{mat}}(u) = P \underset{\mathcal{B}(e,n)}{\operatorname{mat}}(u) P^{-1}$ donc

$$\begin{aligned} M &= PAP^{-1} \\ &= PS_1S_2P^{-1} \\ &= PS_1\left({}^tP\right)\left({}^tP\right)^{-1} S_2 P^{-1} \end{aligned}$$

Comme S_1 et S_2 sont symétriques $V = PS_1\,{}^tP$ et $W = {}^tP^{-1}\,S_2P^{-1}$ le sont aussi : ${}^tV = {}^t\left({}^tP\right)\,{}^tS_1\,{}^tP = PS_1\,{}^tP = V$ et de même pour W.

$S_2 = S^{-1}$ est inversible, donc par produit de matrices inversibles, $W = {}^tP^{-1}\,S_2P^{-1}$ est inversible.

Donc $\boxed{M \text{ vérifie la propriété } (\mathcal{S}).}$

55. Avec les notations précédentes, on a $M = VW$ donc ${}^tM = {}^tW\,{}^tV = WV$
Et comme W est inversible, ${}^tM = {}^tW\,{}^tV = WV = W\,(VW)\,W^{-1} = WMW^{-1}$

Donc $\boxed{{}^tM \text{ et } M \text{ sont semblables avec } Q = W^{-1}}$

56. Le calcul par blocs n'est pas au programme en ECG. Cependant, donner une matrice de passage par bloc est vrai est sera probablement accepté pour cette dernière question (pour celles et ceux qui y arriveront)
On peut cependant s'en passer en utilisant les changements de bases cachés sous les matrices semblables.