La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**
4. Comme c'est parfois le cas aux concours, une annexe rappelant quelques commandes Python est jointe au début du sujet.

Annexe : quelques commandes Python utiles

— `np.eye(n + 1)` : création d'une matrice identité de taille $(n+1) \times (n+1)$.
— `np.linalg.inv(M)` : calcul de l'inverse d'une matrice M.

EXERCICE 1 Ecricome 2021

Partie 1 : Étude de trois matrices

On note A, J et S les matrices de $\pi_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $A^3 = -3A$. En déduire que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
   La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Justifier que J et S sont diagonalisables, et vérifier que $SJ = JS$.
3. On admet que $\mathrm{Sp}(S) = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$. Montrer que tout vecteur propre de S est vecteur propre de J.
4. En déduire qu'il existe une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (qu'on ne demande pas de déterminer) telle que $P^{-1}SP$ et $P^{-1}JP$ soient diagonales.

Partie 2 : Étude des matrices magiques

Soit $n \geqslant 3$. On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est magique quand les sommes des coefficients de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale sont égales. Ainsi en notant :

- $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$,
- pour tout i de $[[1;n]]$, $\ell_i(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$,
- pour tout j de $[[1;n]]$, $c_j(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}$,
- $d_1(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$ et $d_2(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,n-i+1}$,

alors :
M est magique si et seulement si : $\forall (i,j) \in [[1;n]]^2, \quad \ell_i(M) = c_j(M) = d_1(M) = d_2(M)$.
Si M est une matrice magique, la valeur de ces sommes est alors notée $s(M)$ et appelée **somme** de la matrice M.

On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices réelles magiques d'ordre n, et on admet que $\mathcal{E}_n$ ainsi défini est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Montrer que ℓ_1 est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   On admettra dans la suite que, pour tout i de $[[2;n]]$ et pour tout j de $[[1;n]]$, les applications ℓ_i, c_j, d_1, d_2 et s sont des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6. On note $\mathcal{K}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{E}_n$ de somme nulle.
   Montrer que $\mathcal{K}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_n$.
7. Soit $M \in \mathcal{E}_n$. Montrer que ${}^tM$ est aussi un élément de $\mathcal{E}_n$ et déterminer $s\left({}^tM\right)$.
8. Soit $M \in \mathcal{E}_n$. Montrer qu il existe un unique réel λ tel que $M - \lambda J_n \in \mathcal{K}_n$,
   avec $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
9. Soit $M \in \mathcal{E}_n$. Montrer que $W_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M et préciser la valeur propre associée.

Partie 3 : Étude du cas où $n = 3$

On se place dans cette partie dans le cas particulier où $n = 3$.

10. Vérifier que les matrices A, J et S définies dans la partie 1 sont magiques, et déterminer leur somme.
11. Montrer que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(M_1, M_2) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$ tel que :

$$M = M_1 + M_2, \quad \text{avec} \begin{cases} M_1 \text{ antisymétrique,} \\ M_2 \text{ symétrique.} \end{cases}$$

    On explicitera notamment M_1 et M_2 en fonction de M.
12. Soit $M \in \mathcal{K}_3$. On écrit $M = M_1 + M_2$ selon la décomposition vue en question 11 .
    a) Montrer que M_1 et M_2 appartiennent à $\mathcal{K}_3$.
    b) Montrer qu il existe deux réels α et β tels que :

$$M_1 = \alpha A \text{ et } M_2 = \beta S \ .$$

13. En déduire une base de $\mathcal{K}_3$, puis montrer que (A, J, S) est une base de $\mathcal{E}_3$.
14. On note $\Delta = \left\{M \in \mathcal{E}_3 \ / \ P^{-1}MP \text{ est diagonale}\right\}$, où P est la matrice définie dans la partie 1.
    Montrer que $\Delta = \text{Vect}(J, S)$.

EDHEC 2017 Problème

Dans ce problème, n est un entier naturel non nul et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

On note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On rappelle que $e_0 = 1$ et que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $e_k = X^k$.

Partie 1 : étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On considère l'application φ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P, avec la convention $P^{(0)} = P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. a) Calculer $\varphi(e_0)$ et en déduire une valeur propre de φ.
   b) Montrer que : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(e_j) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$.
   c) En déduire que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire et que la seule valeur propre de φ est celle trouvée à la question précédente.
   d) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. a) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, calculer $\varphi(P - P')$.
   b) Déterminer φ^{-1}, puis écrire la matrice de φ^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
   c) On donne le script Python suivant :

```
import numpy as np

def matriceA(n):
  M = np.eye(n + 1)
  for k in range(1, n + 1):
    M[k - 1, k] = -k
  A = ...
  return A
```

   Compléter la ligne laissée en blanc pour que le script affiche la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$ lorsque la valeur de n est entrée par l'utilisateur.

Partie 2 : étude d'une autre application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On désigne par x un réel quelconque.

4. a) Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k\, e^{-t}\, dt$ est convergente.
   b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} P(t)\, e^{-t}\, dt$ est convergente.

5. a) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\, dt$.
   b) Etablir que pour tout entier naturel k, on a : $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k\, e^{-t}\, dt = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i\,!}\, e^{-x}$.

6. Informatique.
   a) Ecrire en Python une fonction `factorielle(n)` qui renvoie la valeur de $n!$ pour tout entier naturel n entré par l'utilisateur.

b) Utiliser l'égalité obtenue à la question 5b) pour compléter le script Python suivant afin qu'il calcule et affiche l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k\, e^{-t}\, dt$, les valeurs de x et de k étant entrées par l'utilisateur.

```
def integrale(k,x):
  s = ...
  for i in range(...):
    s = ...
  resultat = ...
  return resultat
```

c) Montrer, grâce à un changement de variable simple, que $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k\, e^{-t}\, dt = e^x \int_0^{+\infty} (u+x)^k\, e^{-u}\, du$

J'ai retiré ici une question d'info non faisable par vous pour l'instant

On considère maintenant l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe la fonction $F = \Psi(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ F(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t)\, e^{-t}\, dt$$

7. a) Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   b) Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une relation entre F , F' et P.
   c) Montrer que Ψ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

8. On considère un polynôme P non nul, vecteur propre de Ψ associé à la valeur propre $\lambda \neq 0$.
   a) Utiliser la relation obtenue à la question 7.b) pour établir que $P' = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}\, P$.
   b) En déduire, en considérant les degrés, que $\lambda = 1$ est la seule valeur propre possible de Ψ.
   c) Montrer enfin que $\lambda = 1$ est bien la seule valeur propre de Ψ. (On ne demande pas de déterminer le sous-espace propre associé.)

9. a) Montrer que les endomorphismes φ et Ψ sont égaux.
   b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ et s'il existe un réel a tel que pour tout réel x supérieur ou égal à a, on a $P(x) \geq 0$, alors : $\forall x \geq a\ ,\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) \geq 0$.

EDHEC 2016 Problème

Partie 1 : résultats préliminaires

1. Pour chaque entier naturel n, on considère une matrice A_n de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, dont l'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est noté $a_{i,j}(n)$, ainsi qu'une matrice A de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, dont l'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est $a_{i,j}$.
   On suppose que la suite de matrices (A_n) converge vers la matrice A, c'est à dire que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!], \ \lim_{n\to+\infty} a_{i,j}(n) = a_{i,j}$$

   Soient B et C deux autres matrices de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, indépendantes de n.
   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} BA_n = BA$. On admet que ceci reste vrai si B appartient à $\mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R})$.
   On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_nC = AC$ et que ceci reste vrai si C appartient à $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
   On admet également que $\lim\limits_{n\to+\infty} BA_nC = BAC$.

2. Montrer que, si une matrice A de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ est telle que, pour tout i de $[\![1,4]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{4} a_{i,j}$ est une constante c, alors c est une valeur propre de A.
3. Montrer que si une matrice A de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ est diagonalisable, alors la somme de ses valeurs propres, (chacune étant comptée un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre associé) est égale à la trace de A.

Partie 2 : Étude de la matrice d'une chaîne de Markov On considère deux urnes U et V contenant chacune 3 boules. Au départ, l'urne U contient 3 boules blanches et l'urne V contient 3 boules noires.
On effectue une suite de tirages dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à tirer au hasard une boule de chaque urne et à la mettre dans l'autrre urne (un tirage est un échange de 2 boules).
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient U avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage (c'est à dire après le $n^{\text{ème}}$ échange) et on a donc $X_0 = 3$.
On considère le vecteur ligne $L_n = (P(X_n = 0)\ P(X_n = 1)\ P(X_n = 2)\ P(X_n = 3))$.

4. Pour tout couple (i,j) éléments de $[\![0,3]\!]$ et tout entier $n \geqslant 3$, déterminer $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$.
5. a) Soient n un entier supérieur ou égal à 3 et M la matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ dont l'élément de la $(i+1)^{\text{ème}}$ ligne et de la $(j+1)^{\text{ème}}$ colonne est égal à $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$. Justifier soigneusement que M est la matrice donnée à la question 12).
   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3,\ L_{n+1} = L_nM$ (le résultat est admis pour $n = 0, 1$ et 2).
   c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, L_n = L_0M^n$.
6. a) Montrer sans calcul que 1 est valeur propre de M.
   b) On considère les vecteurs $E_1 = (9\ -1\ -1\ 9)$ et $E_2 = (3\ 1\ -1\ -3)$.
   Montrer que ${}^tE_1$ et ${}^tE_2$ sont vecteurs propres de M et donner les valeurs propres associées.
   c) Montrer que, si M est diagonalisable, alors M possède une quatrième valeur propre λ que l'on déterminera. Vérifier que λ est effectivement valeur propre de M et conclure que M est diagonalisable.

Partie 3 : Recherche d'une loi stationnaire

7. Justifier qu'il existe une matrice Q inversible, dont la première colonne ne contient que des "1", et une matrice D diagonale telle que $M = QDQ^{-1}$.

8. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$.

9. Soit $L = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ la première ligne de Q^{-1}.
   a) En utilisant la relation $Q^{-1}M = DQ^{-1}$, montrer que : $\ell_1 = \ell_4$ et $\ell_2 = \ell_3 = 9\ell_4$.
   b) Conclure, en considérant le produit $Q^{-1}Q$, que $\ell_4 = \dfrac{1}{20}$.

10. Déduire de ce qui précède les 16 coefficients de la matrice $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n$.

11. On considère une autre expérience aléatoire qui consiste à tirer 3 boules, une par une et sans remise, dans une urne qui en contient 6, dont 3 sont blanches et 3 sont noires.
    On note B_k (resp. N_k) l'événement « obtenir une boule blanche (resp. noire) au $k^{\text{ème}}$ tirage » et X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
    a) Quelle est la loi de X ?
    b) Vérifier que $\begin{pmatrix} P(X=0) \\ P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tM$.
    c) Montrer que, pour tout $i \in [\![0, 3]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = i) = P(X = i)$.

    On dit alors que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.