Chapitre 3 : nombres réels et suites de nombres réels
Feuille d'exercices

Exercice 1 On se donne une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_{n+1}-u_n-u_n^2\right)=0$.

1. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $+\infty$

   On fixe $\varepsilon\in]0,\dfrac{1}{2}[$ et l'on considère un entier n_0 tel que $\left|u_{n+1}-u_n-u_n^2\right|\leqslant\varepsilon^2$ pour $n\geqslant n_0$.
   - Montrer que, pour $n\geqslant n_0$, on a $u_n\leqslant\varepsilon$.
   - Montrer qu'il existe $n\geqslant n_0$ tel que $u_n\geqslant-\varepsilon$.
   - Montrer que, pour n assez grand, on a $u_n\geqslant-\varepsilon$.
2. Que peut-on dire de la limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_{n+1}-u_n-u_n^2\right)=0$?

Exercice 2 Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq a\\ \forall n\in\mathbb{N},\ v_n\leq b\\ u_n+v_n\underset{n\to+\infty}{\to}a+b\end{cases}$$

Montrer que :

$$u_n\underset{n\to+\infty}{\to}a\quad\text{et }v_n\underset{n\to+\infty}{\to}b$$

Exercice 3 (*) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que :

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n\geqslant 1\\ \forall p,q\in\mathbb{N}^*,\quad u_{p+q}\leqslant u_pu_q\end{cases}$$

et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n=\frac{\ln u_n}{n}$$

Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}v_n$.

0.1 Suites adjacentes

Exercice 4 Soient a et b deux réels tels que $0<a<b$ et $p,\ q$ deux réels strictement positifs. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=a,\ v_0=b$ et $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}=\frac{u_n+pv_n}{1+p},\quad v_{n+1}=\frac{u_n+qv_n}{1+q}$$

1. Comment faut-il choisir p et q pour que :

   $$u_0<u_1<v_1<v_0?$$

   on suppose cette condition réalisée dans la suite de l'exercice.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

   $$u_n<u_{n+1}<v_{n+1}<v_n$$

3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, puis qu'elles sont adjacentes.

Exercice 5 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies pour tout entier n non nul par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1} \text{ et } v_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

2. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice 6 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies pour tout entier non nul n par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{1^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \text{ et } v_n = u_n\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_1 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_1$.
3. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont toutes les deux adjacentes.

Exercice 7 Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = a, v_0 = b, \text{ et, pour tout } n, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \sqrt{v_n u_{n+1}}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Soit α le réel de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos\alpha = \frac{a}{b}$.

2. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = v_n \cos\frac{\alpha}{2^n}$, puis $v_n = \frac{b\sin\alpha}{2^n \sin\frac{\alpha}{2^n}}$.
3. En déduire la limite commune des deux suites. On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Exercice 8 Soient u une suite décroissante, convergeant vers 0 et v la suite de terme général $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

1. Montrer que les suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que la suite v converge et que sa limite ℓ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |v_n - \ell| \leqslant u_{n+1}$$