Chapitre 8 : Polynômes
Feuille d'exercices

Exercice 1 (Echauffement calculatoire)
Développer les polynômes suivants :

1. $(2x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2-3x+1)$
2. $(x^3+x^2-x-1)(x^2-2x-1)$
3. $(x^2-4x+1)(x^4-x^2+3x+2)$
4. $P(Q)$ et $Q(P)$ avec $P=x^2+x+1$ et $Q(x)=x^2-1$
5. $P(x)=(x-1)^2\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$

Exercice 2 On appelle polynôme pair tout polynôme P tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(-x)=P(x)$, et polynôme impair un polynôme P tel que $P(-x)=-P(x)$.

Montrez que tous les coefficients d'indices impairs d'un polynôme pair sont nuls. Que dire des coefficients d'un polynôme impair ?

Exercice 3 Déterminez le reste de la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A(x)=x^4-x^3+3x^2+x-1$ et $B(x)=x^2+x$
2. $A(x)=x^4-2x^2+x$ et $B(x)=x-1$
3. $A(x)=x^n$ et $B(x)=x^2-x-2$.
4. $A(x)=x^n-3x+1$ et $B(x)=x^2-3x+2$.
5. $A(x)=x^n$ et $B(x)=x^2-2x+1$.

Exercice 4 Soit $P\in\mathbb{R}[x]$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=P(x+1)$.

1. Montrez que si P admet une racine, alors il en admet une infinité.
2. En déduire l'ensemble des polynômes P possibles.

Exercice 5 Soient a,b,c et d des nombres réels. Montrez qu'il existe un unique polynôme $P\in\mathbb{R}_3[x]$ vérifiant $P(-1)=a$, $P'(-1)=b$, $P(1)=c$ et $P'(1)=d$.

Exercice 6 Déterminez l'unique polynôme $P\in\mathbb{R}_3[x]$ vérifiant $P(0)=2$, $P'(0)=3$, $P''(0)=-2$ et $P^{(3)}(0)=6$.

Exercice 7

1. Déterminez les polynômes P tels que $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(3x)=P'(x)P''(x)$
2. Même question avec $P(x^2)=(x^2+1)P(x)$

Exercice 8 Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par récurrence par

$$\begin{cases} P_0(x)=\dfrac{1}{2} \\ P_1(x)=x \\ \forall n\in\mathbb{N}, P_{n+2}(x)=2xP_{n+1}(x)-x^2P_n(x) \end{cases}$$

1. Montrez qu'il existe une suite a_n telle que $\forall x\in\mathbb{R}$, $P_n(x)=a_nx^n$.
2. Calculez P_n.

Exercice 9 Déterminez l'ordre de multiplicité de la racine α dans les polynômes P suivants :

1. $\alpha=2$ et $P(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$
2. $\alpha=-2$ et $P(x)=x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16$
3. $\alpha=1$ et $P(x)=x^{2n}-(2n+1)x^{n+1}+(2n+1)x^n-x$

Exercice 10 Soit $n\geq 1$.

1. Montrez que $x+2$ divise $x^4+3x^3+x^2+4$

2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x+1)^2$ divise $P(x) = x^{4n+2} + 2x^{2n+1} + 1$.
3. Montrez que pour tout $n \geq 1$, le polynôme $nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n$ est divisible par $(x-1)^3$.

Exercice 11 Trouver les réels a et b tel que $(x-1)^2$ divise $ax^4 + bx^3 + 1$.

Exercice 12 Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}[x]$:

1. $x^2 + x + 1$
2. $-3x^2 + 5x + 2$
3. $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$
4. $x^4 - x^2 - 6$
5. $x^4 - x^2 + 1$
6. $2x^4 + 2$

Exercices supplémentaires Les exercices suivants sont globalement un peu plus difficiles. J'ai marqué d'une étoile ceux un peu plus dur et de deux étoiles ceux qui sont vraiment plus dur. Si pas d'étoile, c'est que l'exercice n'est pas si difficile selon moi (ce n'est que mon ressenti, peut-être trouverez-vous tous ces exercices faciles)

Exercice 13 *
Soit le polynôme

$$P = X^5 - (1+\sqrt{3})X^4 + \sqrt{3}X^3 + \sqrt{3}X^2 - (1+\sqrt{3})X + 1.$$

1. Déterminez la multiplicité de 1 comme racine de P.
2. Factoriser P par $(X-1)^n$ où n est l'ordre de multiplicité déterminé précédemment.
3. Déterminez la multiplicité de -1 comme racine de P
4. En déduire la factorisation de P .

Exercice 14 *
Soient a, b et c 3 nombres complexes, et soient les polynômes :

$$P = (X-a)(X-b)(X-c) \quad \text{et} \quad Q = (X-a^2)(X-b^2)(X-c^2).$$

1. Montrez que $Q(X^2) = -P(X)P(-X)$
2. Calculer les coefficients de Q en fonction de ceux de P.
3. Déterminez Q lorsque $P = X^3 - X + 2$.

Exercice 15 (Classique)
1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = X^2 - X - 2$.
   (a) Montrez que $P(A) = 0$.
   (b) Déterminez le reste de la division euclidienne de X^n par P.
   (c) En déduire A^n.
2. Mêmes questions avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = X^2 - 2X + 1$.

Exercice 16 (Formule de Vandermonde) *
Soient $n, m \in \mathbb{N}$.

1. En utilisant deux écritures différentes de $(X+1)^n(X+1)^m$, montrez la formule :

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$

Exercice 17 *
1. Trouvez tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $P(x+y) = P(x)P(y)$
2. Même question avec $P(xy) = P(x) + P(y)$.
3. En déduire que le logarithme et l'exponentielle ne peuvent pas être des fonctions polynomiales.

Chapitre 8 : Polynômes
Feuille d'exercices

Exercice 1 (Echauffement calculatoire)
Développer les polynômes suivants :

1. $(2x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2-3x+1)$
2. $(x^3+x^2-x-1)(x^2-2x-1)$
3. $(x^2-4x+1)(x^4-x^2+3x+2)$
4. $P(Q)$ et $Q(P)$ avec $P=x^2+x+1$ et $Q(x)=x^2-1$
5. $P(x)=(x-1)^2\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$

Exercice 2 On appelle polynôme pair tout polynôme P tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(-x)=P(x)$, et polynôme impair un polynôme P tel que $P(-x)=-P(x)$.

Montrez que tous les coefficients d'indices impairs d'un polynôme pair sont nuls. Que dire des coefficients d'un polynôme impair ?

Exercice 3 Déterminez le reste de la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A(x)=x^4-x^3+3x^2+x-1$ et $B(x)=x^2+x$
2. $A(x)=x^4-2x^2+x$ et $B(x)=x-1$
3. $A(x)=x^n$ et $B(x)=x^2-x-2$.
4. $A(x)=x^n-3x+1$ et $B(x)=x^2-3x+2$.
5. $A(x)=x^n$ et $B(x)=x^2-2x+1$.

Exercice 4 Soit $P\in\mathbb{R}[x]$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=P(x+1)$.

1. Montrez que si P admet une racine, alors il en admet une infinité.
2. En déduire l'ensemble des polynômes P possibles.

Exercice 5 Soient a,b,c et d des nombres réels. Montrez qu'il existe un unique polynôme $P\in\mathbb{R}_3[x]$ vérifiant $P(-1)=a$, $P'(-1)=b$, $P(1)=c$ et $P'(1)=d$.

Exercice 6 Déterminez l'unique polynôme $P\in\mathbb{R}_3[x]$ vérifiant $P(0)=2$, $P'(0)=3$, $P''(0)=-2$ et $P^{(3)}(0)=6$.

Exercice 7

1. Déterminez les polynômes P tels que $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(3x)=P'(x)P''(x)$
2. Même question avec $P(x^2)=(x^2+1)P(x)$

Exercice 8 Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par récurrence par

$$\begin{cases} P_0(x)=\dfrac{1}{2} \\ P_1(x)=x \\ \forall n\in\mathbb{N}, P_{n+2}(x)=2xP_{n+1}(x)-x^2P_n(x) \end{cases}$$

1. Montrez qu'il existe une suite a_n telle que $\forall x\in\mathbb{R}$, $P_n(x)=a_nx^n$.
2. Calculez P_n.

Exercice 9 Déterminez l'ordre de multiplicité de la racine α dans les polynômes P suivants :

1. $\alpha=2$ et $P(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$
2. $\alpha=-2$ et $P(x)=x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16$
3. $\alpha=1$ et $P(x)=x^{2n}-(2n+1)x^{n+1}+(2n+1)x^n-x$

Exercice 10 Soit $n\geq 1$.

1. Montrez que $x+2$ divise $x^4+3x^3+x^2+4$

2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x+1)^2$ divise $P(x) = x^{4n+2} + 2x^{2n+1} + 1$.
3. Montrez que pour tout $n \geq 1$, le polynôme $nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n$ est divisible par $(x-1)^3$.

Exercice 11 Trouver les réels a et b tel que $(x-1)^2$ divise $ax^4 + bx^3 + 1$.

Exercice 12 Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}[x]$:

1. $x^2 + x + 1$
2. $-3x^2 + 5x + 2$
3. $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$
4. $x^4 - x^2 - 6$
5. $x^4 - x^2 + 1$
6. $2x^4 + 2$

Exercices supplémentaires Les exercices suivants sont globalement un peu plus difficiles. J'ai marqué d'une étoile ceux un peu plus dur et de deux étoiles ceux qui sont vraiment plus dur. Si pas d'étoile, c'est que l'exercice n'est pas si difficile selon moi (ce n'est que mon ressenti, peut-être trouverez-vous tous ces exercices faciles)

Exercice 13 *
Soit le polynôme

$$P = X^5 - (1+\sqrt{3})X^4 + \sqrt{3}X^3 + \sqrt{3}X^2 - (1+\sqrt{3})X + 1.$$

1. Déterminez la multiplicité de 1 comme racine de P.
2. Factoriser P par $(X-1)^n$ où n est l'ordre de multiplicité déterminé précédemment.
3. Déterminez la multiplicité de -1 comme racine de P
4. En déduire la factorisation de P .

Exercice 14 *
Soient a, b et c 3 nombres complexes, et soient les polynômes :

$$P = (X-a)(X-b)(X-c) \quad \text{et} \quad Q = (X-a^2)(X-b^2)(X-c^2).$$

1. Montrez que $Q(X^2) = -P(X)P(-X)$
2. Calculer les coefficients de Q en fonction de ceux de P.
3. Déterminez Q lorsque $P = X^3 - X + 2$.

Exercice 15 (Classique)
1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = X^2 - X - 2$.
   (a) Montrez que $P(A) = 0$.
   (b) Déterminez le reste de la division euclidienne de X^n par P.
   (c) En déduire A^n.
2. Mêmes questions avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = X^2 - 2X + 1$.

Exercice 16 (Formule de Vandermonde) *
Soient $n, m \in \mathbb{N}$.

1. En utilisant deux écritures différentes de $(X+1)^n(X+1)^m$, montrez la formule :

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$

Exercice 17 *
1. Trouvez tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $P(x+y) = P(x)P(y)$
2. Même question avec $P(xy) = P(x) + P(y)$.
3. En déduire que le logarithme et l'exponentielle ne peuvent pas être des fonctions polynomiales.