Chapitre 8 : Polynômes de Lagrange
Feuille d'exercices

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n réels deux à deux distincts. On considère la famille de polynômes $(L_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définie par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad L_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

1. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer le degré de L_i, les racines de L_i et $L_i(x_i)$.
2. Montrer que : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} L_j = 1$.
3. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. Montrer que : $P = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(x_j) L_j$.
4. Exemple d'utilisation des polynômes interpolateurs de Lagrange. On souhaite déterminer une fonction polynomiale f dont la courbe passe par les trois points $A(2, 3)$, $B(4, 2)$ et $C(5, 4)$. D'après ce qui précède, on sait qu'il existe effectivement une fonction f de degré inférieur ou égal à 2 répondant au problème.
   a) Posons : $x_1 = 2, x_2 = 4$ et $x_3 = 5$. Calculer L_1, L_2, L_3.
   b) Posons : $y_1 = 3, y_2 = 2$ et $y_3 = 4$. Considérons le polynôme :
   $$f = y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3$$
   Que vaut $f(x_i)$ pour $i = 1, 2$ et 3 ?
   c) Simplifier $f(x)$.