Chapitre 9 : Limites de fonctions
Feuille d'exercices

Exercice 1 Déterminer les limites suivantes (si elles existent) :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5 - 2x^2 + 8x^8$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 + x^2 + 5$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 + \dfrac{1}{x} + 2$
4. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^3+3x^2-x^6}{7x+8x^{12}}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+3x^2-x^6}{7x+8x^{12}}$
6. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-1}{x^3-x^2+x-1}$
7. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$
8. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2+6x+5}{x^3+1}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(2-\sin(x))$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2}-3x$
11. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2}+3x$

Exercice 2 Calculez les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+x^7+2}{e^{-x}+x^5-3}$
2. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^2+6x+2}-3}{x^3-1}$
3. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin 2x}{x-\pi}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+3}-x$
5. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to0} \tan x \sin\dfrac{1}{x}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(\cos(x))}{x}$

Exercice 3 Même chose : calculez les limites...

1. $\lim\limits_{x\to0} x\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1)-\ln(x-1)$
3. $\lim\limits_{x\to0} \ln(x^2)+\ln\dfrac{1+x}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{e^{-x^2}}$
5. $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln x$

Exercice 4 Etudiez la continuité ou le prolongement par continuité des fonctions suivantes au point proposé.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq 2 \\ x+3 & \text{si } x < 2 \end{cases}$. Continuité en 2 ?
2. $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(1) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. $f(x) = \dfrac{x^2\ln(x)}{x-1}$. Continuité en 1 ?
3. f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Prolongement possible en 1 ?
4. f définie sur $[-3,6[\cup]6,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$. Prolongement possible en 6 ?
5. f définie par sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-1}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ -1-x^2\ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Prolongement en 0 ?

Exercice 5 Calculez les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^x$
2. $\lim\limits_{x\to0} x^x$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$
4. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos(2x)-1}{x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{x(x+2)}$
6. $\dfrac{3x^3+e^x+2}{e^{2x}+\ln(x)+x^5}$ en $+\infty$.
7. $x^2(\ln(x+1)-\ln x)$ en $+\infty$
8. $\dfrac{x\ln(1+x)}{\sin x^2}$ en 0.
9. $(1+x^\alpha)^{\frac{1}{x}}$ en 0 selon la valeur de $\alpha > 0$.
10. $\dfrac{\sin(2x)-x}{\ln(1+x)}$ en 0.

Exercice 6 Soit f une fonction périodique définie sur $\mathbb{R}$.
Montrez que f admet une limite en $+\infty$ si et seulement si f est constante.