Chapitre 10 : Comparaison de fonctions
Feuille d'exercices

Exercice 1 1. Soit f, g et h trois fonctions définies sur un ensemble D, et soit a un élément de D ou ne borne de D (éventuellement $a = \pm\infty$). Montrez que si $f \overset{a}{=} o(g)$, alors $fh \overset{a}{=} o(gh)$.

2. En déduire que si $f(x) \overset{0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$ alors $x^3f(x) \overset{0}{=} a_0x^3 + a_1x^4 + a_2x^5 + o(x^5)$.
3. Montrez les relations suivantes : $x^2 \ln x \overset{+\infty}{=} o(x^3)$ et $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \overset{+\infty}{=} x + o(x)$
4. Montrez que au voisinage de $+\infty$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*,\ x^\alpha \ln^\beta x = o(e^{\gamma x})$

Exercice 2 Soit un polynôme P défini par $P(x) = a_m x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \dots a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ avec $m < n$ et $a_m a_n \neq 0$.

1. Donner un équivalent de $P(f(x))$ au voisinage du point a dans les cas suivants :
   — $f(x) = \sin(x)$ (pour $a = 0$)
   — $f(x) = e^x$ (pour $a = +\infty$)
   — $f(x) = \ln x$ (pour $a = 0$ et pour $a = +\infty$)
2. Donnez un équivalent de $g(x)$ au voisinage de $+\infty$ dans les cas suivants :
   — $g(x) = (\ln^2 x + 3\ln x + 2)(e^{2x} + 5e^x + 3)$
   — $g(x) = \dfrac{7\ln^3 x + 5\ln x + 4}{(x^2+3)^3}$

Exercice 3 Les fonctions f et g définie des façons suivantes sont-elles équivalentes au voisinage indiqué ?

1. $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{\sqrt{x}}$ au vois. de $+\infty$.
2. $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{2x}$ au vois. de $+\infty$.
3. $f(x) = x^{\ln x}$ et $g(x) = (\ln x)^x$ au vois. de $+\infty$.
4. $f(x) = (e^x - 1)^2$ et $g(x) = x \sin x$ au vois. de 0
5. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ et $g(x) = x^3$ au vois. de 0

Exercice 4 Calculez les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^x$
2. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{x(x+2)}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - 1}{x}$ (en fonction de $a \in \mathbb{R}$)
7. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} - \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$
8. $\dfrac{3x^3 + e^x + 2}{e^{2x} + \ln(x) + x^5}$ en $+\infty$.
9. $\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ en 0 pour a et b réels non nuls.
10. $x^2(\ln(x+1) - \ln x)$ en $+\infty$
11. $\dfrac{x\ln(1+x)}{\sin x}$ en 0.
12. $\sin(x)\ln(\tan x)$ en 0
13. $\dfrac{\sin(2x) - x}{\ln(1+x)}$ en 0.
14. $(1 + x^\alpha)^{\frac{1}{x}}$ en 0 selon la valeur de $\alpha > 0$.
15. $\dfrac{e^x - \sqrt{1-x}}{x}$ en 0.

Exercice 5 Étudiez les fonctions suivantes (domaine de définition, tableau de variation, limites, étude des branches infinies, asymptote)

1. $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$
2. $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$
3. $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$