Chapitre 11 : continuité
Feuille d'exercices

Exercice 1 (Algorithme de dichotomie et preuve du théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $a < b$ deux réels et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. On suppose que $f(a)f(b) < 0$. On cherche à montrer le théorème des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que f s'annule sur $[a; b]$ puis à écrire un algorithme en Python permettant de trouver un endroit où la fonction s'annule.

1. **Étude mathématique** Soient les suites (a_n), (b_n) et (c_n) définies de la façon suivante :

   On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et on pose :

   $$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = c_n & \text{si } f(a_n)f(c_n) < 0 \\ a_{n+1} = c_n \text{ et } b_{n+1} = b_n & \text{si } f(a_n)f(c_n) > 0 \\ a_{n+1} = b_{n+1} = c_n & \text{si } f(a_n)f(c_n) = 0 \text{ et les suites sont alors constantes} \end{cases}$$

   a) On suppose que la troisième situation n'arrive jamais. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   (i) $f(a_n)f(b_n) < 0$
   (ii) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ et $a_n < b_n$.

   b) En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $\alpha \in [a, b]$.

   c) Justifiez que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)f(b_n) = f(\alpha)^2$ et montrez, en étudiant le signe de cette limite, que $f(\alpha) = 0$.

   d) En déduire le théorème des valeurs intermédiaires.

2. **Algorithme Python**
   Compléter l'algorithme suivant afin qu'il trouve la valeur d'une racine de f sur $[a; b]$ à 10^{-p} prêt.

```
def dichotomie(f,a,b,p):
    fa = f(a)
    fb = f(b)
    if fa * fb > 0:
        print("Erreur : f(a) et f(b) doivent être de signes opposés")
        return None
    # Initialisation des bornes
    an = a
    bn = b
    # Boucle principale
    while .... :  # Compléter la condition d'arrêt
        cn = ....
        fcn = ....
        .......# Compléter ici en utilisant les mêmes idées
        ..... #que dans la partie mathématique
    return ....
```

Exercice 2

1. a) Justifiez que cos est une bijection de $[0, \pi]$ sur un intervalle à déterminer.
   b) On appelle arccos cette bijection réciproque. Justifiez que arccos est continue sur son ensemble de définition, donnez son tableau de variation et tracez sa représentation graphique.
2. On se propose maintenant d'étudier la fonction f définie par $f(x) = \arccos(\cos x)$.
   a) Donner l'ensemble de définition de f.
   b) Déterminez la parité et la périodicité de la fonction f.
   c) f est-elle continue sur son ensemble de définition ?
   d) Tracez la courbe représentative de f.

Exercice 3 Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue sur $[a, b]$. On veut montrer que nécessairement f admet au moins un point fixe, c'est à dire qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.
Pour cela, on pose $g : x \to f(x) - x$.

1. Montrez que g est continue.
2. Montrez que $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$.
3. En déduire que f admet au moins un point fixe.
4. On suppose en plus que f est décroissante. Montrez qu'alors le point fixe est unique.

Exercice 4 Soit $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive sur $[1, 2]$. Montrez qu'il existe deux constantes a et b, $0 < a \leq b$ telles que pour tout $x \in [1, 2]$, $ax \leq f(x) \leq bx$.

Exercice 5 Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2 - x \ln x - 1$.

1. Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites en $+\infty$ et en 0.
2. Montrez que f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans un intervalle à préciser, et donner le tableau de variation de f^{-1}, avec les limites en ses bornes de définition.
3. Justifiez que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe x_n tel que $f(x_n) = n$. Déterminez x_0 et étudiez la monotonie de la suite (x_n), puis sa limite lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 6 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n définie par :

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n + 2x^2 + x - 1 \end{array}$$

1. Montrez que pour tout $n \geq 1$, il existe un unique $x_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrez que pour tout $n \geq 1$, $f_{n+1}(x_n) \leq 0$.
3. En déduire que la suite (x_n) est croissante et montrez qu'elle converge.
4. Déterminez $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^n$. En déduire la limite de (x_n).

Exercice 7 Soit u_n la suite définie par $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin(x)$. Montrez que f est croissante sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ et que $f\left([0, \frac{\pi}{2}]\right) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Montrez que pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $f(x) \leq x$.
3. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$. En déduire que (u_n) est décroissante.
4. Calculez $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 8 Soit $f :]-3, +\infty] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{4x+2}{x+3}$, et soit (u_n) définie par $u_0 > -3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Tracez sur un même graphique la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-3, 5]$ et la droite d'équation $y = x$.
2. Représentez les premiers termes de la suite sur le graphique pour $u_0 = 1$ puis pour $u_0 = 3$
3. Montrez "en vrai" ce que laisse penser ce dessin du point de vue de la monotonie et de la convergence de la suite pour les valeurs de u_0 de la question 2.

Exercice 9 Soit f la fonction définie par $f(x) = 1/x+x$. On considère la suite définie par récurence par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Verifiez que la suite est bien définie.
2. Montrez que la suite (u_n) est monotone et calculez sa limite éventuelle.

Exercice 10 Soit (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = 1 - u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ et représenter graphiquement la fonction f, la première bissectrice (i.e. la fonction d'équation $y = x$) et les premiers termes de la suite.
2. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Soit $h = f \circ f$. Montrer que ces suites vérifie les relations de récurrence : $v_{n+1} = h(v_n)$ et $w_{n+1} = h(w_n)$.
3. Calculer explicitement h, et étudier les convergences des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Exercice 11 * Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$$

Indication : représenter les premiers termes de la suite, puis s'aider de l'exercice précédent.

Exercice 12 Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et telle que, pour tout réel x, on ait $f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 13 Le but de cet exercice est de montrer que toute fonction continue sur $\mathbb{R}$, de limite finie en $-\infty$ et $+\infty$, est bornée. Soit donc f une telle fonction. On note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$.

1. En utilisant la définition de la limite de f en $-\infty$, justifier l'existence d'un réel négatif B tel que : $\forall x < B, a-1 \leq f(x) \leq a+1$.
2. Montrer de même qu'il existe un réel B' positif tel que : $\forall x > B', b-1 \leq f(x) \leq b+1$.
3. Justifier l'existence de deux réels m et M tels que : $\forall x \in [B, B'], m \leq f(x) \leq M$.
4. Conclure.

Exercice 14 * On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)\cos x \qquad (E)$$

Soit f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f_1 est continue et vérifie l'équation (E).
2. Soit f une fonction continue qui vérifie la relation (E). Montrer qu'alors f vérifie également la relation suivante :

$$\text{pour tout } x \neq 0 \text{ et pour tout } n \geq 1, \ \ f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

3. Justifier que $\lim_{n\to+\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = x$.
4. En déduire une relation entre f, $f(0)$ et f_1.
5. Montrer que f est solution au problème considéré si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda f_1$.

Exercices supplémentaires non tous corrigés en classe

Exercice 15 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x)$$

Montrer que f est constante.

Indication : On pourra étudier les suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}$. S'aider de l'exercice du DM pour avoir des idées ensuite.

Exercice 16 Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = xe^x - \frac{1}{2}$ et g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{2e^x}$

1. Montrer qu'il existe une unique solution β de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et que cette solution vérifie $g(\beta) = \beta$
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et par $u_{n+1} = g(u_n)$.
   a) Vérifier que pour tout entier n, u_n appartient à l'intervalle $[0, 1]$
   b) Montrer que pour tout n, on a $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta|$
   c) En déduire que pour tout entier n, on a $|u_n - \beta| \leq (\frac{1}{2})^n$
   d) Déduire des questions précédentes une fonction Python qui a pour paramètre un réel epsilon et pour résultat une valeur approchée de β à epsilon près

Exercice 17

Pour tout entier n positif, on définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n par :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f_n(x) = e^x + nx^2 - 3$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a exactement une solution positive, notée u_n
2. Préciser la valeur de u_0. Dans la suite on supposera que $n \geq 1$
3. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0, 1[$
4. Écrire une fonction Python qui prend un entier n et qui calcule une valeur approchée de u_n à $0,001$ près par la méthode de dichotomie
5. Montrer que : $\forall x \in]0, 1[, f_{n+1}(x) > f_n(x)$
6. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone
7. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note l sa limite
8. On suppose dans cette question que $l > 0$. Calculer la limite de $e^{u_n} + nu_n^2 - 3$ et en déduire une contradiction
9. Donner enfin la valeur de l
10. Montrer que $\frac{u_n}{\sqrt{\frac{2}{n}}}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$

Exercice 18 Montrer que la relation $nu_n^{n+1} - (n+1)u_n^n = 1$ définit une suite positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unique. Étudier sa convergence et préciser sa limite.