Chapitre 14 : Dérivation - Etudes de fonctions
Feuille d'exercices

Exercice 1 Déterminer dans chaque cas le domaine de définition, le domaine de dérivabilité "a priori" et l'expression de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto f(x)$:

1. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2$
2. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+x+1}$
3. $f(x) = (x-3)(x-2)$
4. $f(x) = \cos(4x)$
5. $f(x) = \sin\left(\dfrac{2}{3}x + 2\right)$
6. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
7. $f(x) = (\sin(x))^3$
8. $f(x) = \sin(x^3)$
9. $f(x) = \tan(2x)$
10. $f(x) = \ln(x^4)$
11. $f(x) = 4\ln(x)$
12. $f(x) = \sqrt{x^2+2}$
13. $f(x) = (1+x^2)\arctan(x)$
14. $f(x) = (x^2-2x)e^x$
15. $f(x) = e^{\frac{x^3}{2}}$
16. $f(x) = \sqrt{e^{x^3}}$
17. $f(x) = \ln(\cos(x))$
18. $f(x) = x\ln(x) - x$
19. $f(x) = \sqrt{1+\cos^2(x)}$
20. $f(x) = \ln(\ln(x))$

Exercice 2 Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ et $g : x \mapsto \tan x$

1. Dressez le tableau de variation de f.
2. Justifiez que la fonction $h = g \circ f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Calculez $h'(x)$ et en déduire le tableau de variation de h.

Exercice 3 soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{|x|}$.

1. Justifiez que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. f est-elle dérivable en 0 ? Donnez l'équation de la tangente en 0.

Exercice 4 Pour chacune des fonctions proposées, pourquoi ne peut-on pas dire directement que f est dérivable au point x_0 proposé ? Etudier la dérivabilité des fonctions f suivantes en ce point et calculez la valeur de la dérivée si elle existe.

1. $f : x \mapsto (x^2-4x+3)\sqrt{x-1}$ en $x_0 = 1$.
2. $f : x \mapsto x|x|$ en $x_0 = 0$

Exercice 5 Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}$

1. Quel est D_f, l'ensemble de définition de f ?
2. Montrez que f est dérivable sur $D_f \setminus \{-1; 1\}$.
3. f est-elle dérivable en 1 et en -1 ? Donnez si elle(s) existe(nt) l'équation des tangentes ou des demi-tangentes en 1 et -1.

Exercice 6 Etudiez la dérivabilité des fonctions suivantes et calculez leur dérivée.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x|$.
2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.
3. f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Exercice 7

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$. Quelle valeur pour $x < 0$?
2. Montrez que pour tout $x \in]-1, 1[$, $2\arctan x = \arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$.

Exercice 8 (Etude détaillée d'une fonction) Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 1}{x + 1} & \text{si } x > 0 \\ -1 + x^2 \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrez que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Justifiez que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculez $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
3. Montrez que le prolongement de f est dérivable en 0 et précisez la valeur de la dérivée.
4. Dressez le tableau de variation de f en précisant les limites.
5. a) Montrez qu'au voisinage de $+\infty$, f admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 2$.
   b) quelle est la position de la courbe de f par rapport à son asymptote ?
6. a) Calculez pour tous réels a, b, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b)$.
   b) Que peut-on en déduire pour l'allure de la courbe ?
7. Tracez approximativement le graphe de f en faisant apparaitre les différentes caractéristiques remarquées lors de l'étude précédente. On donne $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0,6$.

Exercice 9 Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in]0;1[$ tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

Exercice 10

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.
2. En déduire que, pour tout $n \geq 2$,
   $$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \ln n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}.$$
3. Puis que : $\forall n \geq 2,\ \ln(n+1) \leq 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} \leq 1 + \ln(n)$.
4. En déduire la limite de $\dfrac{S_n}{\ln(n)}$ où $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad (n \geq 2)$.

Exercice 11
Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$ et $u_0 \geq 3$.

1. Déterminez une fonction f définie sur $I = [3, +\infty[$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
3. Justifiez que pour tout couple (x, y) de réels de I, on a
   $$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{6}|x - y|$$
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 3| \leq \dfrac{1}{6}|u_n - 3|$
5. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 3| \leq \dfrac{1}{6^n}|u_0 - 3|$ et en déduire que $\lim u_n = 3$.

Exercice 12

1. Montrer que $f : x \mapsto (x^2 - 2x + 2)e^x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Sur quel ensemble f^{-1} est-elle dérivable ? Préciser $f(1)$, $f'(1)$ et $(f^{-1})'(e)$.

Exercice 13 Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) = f'(a) = 0$ et $f(b) = f'(b) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction $g : x \to e^{-x}(f(x) + f'(x))$, montrez qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

Exercice 14 Montrer à l'aide du TAF que :

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}.$$

Exercice 15 (*) Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ dérivable et vérifiant $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$. Montrer que la dérivée de f s'annule.

Exercice 16 Soient $n \in \mathbb{N}, a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Montrer que si

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ et } f(b) = 0$$

alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 17 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$$

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 18 Soit $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{+\infty} f = f(0)$$

Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 19 Soit $a > 0$ et f une fonction rélle continue sur $[0; a]$ et dérivable sur $]0; a]$. On suppose

$$f(0) = 0 \text{ et } f(a)f'(a) < 0$$

Montrer qu'il existe $c \in]0; a[$ tel que $f'(c) = 0$.