Chapitre 15 : Primitives et intégrales
Feuille d'exercices

Exercice 1 Déterminez une primitive des fonctions suivantes en précisant les intervalles sur lesquels vous travaillez.

1. $f : x \mapsto x\cos(x^2)$
2. $f : x \mapsto 2x^2(x^3+1)^4$
3. $f : x \mapsto \tan x$
4. $f : x \mapsto xe^{x^2}$
5. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$
6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^5}$
7. $f : x \mapsto \dfrac{x}{(3+x^2)^2}$
8. $f : x \mapsto \sin(3x+1)$
9. $f : x \mapsto e^{2x-3}$
10. $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$
11. $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$
12. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+4x^2}$
13. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ (indication : trouvez deux réels a et b tel que $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$)

Exercice 2 Déterminez une primitive des fonctions suivantes en précisant les intervalles sur lesquels vous travaillez.

1. $f : x \mapsto xe^{3x+1}$
2. $f : x \mapsto x^4\ln(x)$
3. $f : x \mapsto \dfrac{x}{\cos^2 x}$
4. $f : x \mapsto x^3e^{x^2}$
5. $f : x \mapsto \arctan(x)$

Exercice 3 Justifiez l'existence des intégrales suivantes et calculez les :

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\cos x| dx$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x|x| dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2x) dx$
4. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1+4x^2} dx$
6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$
7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{4x-2}{(x+2)(x^2+1)}$ (écrire sous la forme $\dfrac{a}{x+2} + \dfrac{bx}{x^2+1}$).
8. $\displaystyle\int_1^{e} \ln(\sqrt{x}) dx.$

Exercice 4 Calculer l'aire de la surface limitée par les droites d'équations $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ et la parabole d'équation $y = x^2 - x$.

Exercice 5 Calculez les intégrales ou primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^3}{x^2+1} dx$
   (poser $t = x^2 + 1$)
2. $\displaystyle\int_2^{7} \frac{\sqrt{2+x}}{x+1} dx$
   (poser $x = u^2 - 2$).
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^3 t dt.$
   (poser $u = \sin(t)$)
4. Donnez une primitive à $x \mapsto \dfrac{2e^x+1}{e^x+1}$
   (poser $t = e^x$)

Exercice 6 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{(1+2x)^2}$.

1. Déterminez l'ensemble de définition de f, noté D_f, et montrez qu'il existe A et B réels tels que, pour
$$\forall x \in D_f, f(x) = \frac{A}{1+2x} + \frac{B}{(1+2x)^2}$$
2. Déterminez une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{-2x}}{(1+2e^{-x})^2}$ (on effectuera le changement de variable $t = e^{-x}$)

Exercice 7 Justifier l'existence et calculer les intégrales ou les primitives suivantes :

1. $\int_0^1 x^2 e^x dx$.
2. $\int_1^e \ln^2 x dx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$

Exercice 8

1. Soit $a > 0$ et f une fonction continue sur $[-a, a]$. On suppose que f est impaire. Montrez que $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.
2. Calculez $\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{e^{x^2}\sin^7 x + x\ln(1+|x|)}{\cos^8(x)} dx$

Exercice 9 Calculer les limites des suites u_n suivantes :

1. $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$
2. $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - \frac{k^2}{4}}}$
3. $u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$
4. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{8k^3 + n^3}$.

Exercice 10 On souhaite donner un équivalent de la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$
Indication : on pourra considérer la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur l'intervalle $[k, k+1]$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 1$, on a
$$\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$$
3. Montrez que $\lim \frac{S_n}{lnn} = 1$.

Exercice 11 Soit $\varphi : x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$. On note $f : x \mapsto e^{-x^2}$ et soit F une primitive de f.

1. Justifiez que φ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Exprimez φ en fonction de F. En déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculez $\varphi'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. φ est-elle une primitive de f ?
4. Etudiez la parité de φ.
5. Montrez que, pour $x \geq 0$, $0 \leq \varphi(x) \leq xe^{-x^2}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$ puis $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$.
6. Donnez le tableau de variation de φ avec ses limites.

Exercice 12
Soit $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ et soit $G(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$

1. Montrez que le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrez que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculez $F'(x)$.
3. Déterminez le domaine de définition de G.
4. Exprimez G en fonction de F et montrez que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Calculez $G'(x)$ et donner une expression simple de la fonction G.

Exercice 13 On pose : $\forall x > 0, f(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^u \ln(u+1)\mathrm{d}u$

Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 14 Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \int_0^1 (t-x)\mathrm{e}^t \ \mathrm{d}t$$

Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 15 Soit g une fonction continue sur $[0,1]$. On définit la fonction φ sur $[0,1]$ par :

$$\forall t \in [0,1], \varphi(t) = \int_0^t (t-u)g(u)\mathrm{d}u$$

Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et calculer φ' et φ''.

Exercice 16

1. Montrer que, pour tout réel x, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-(xt)^2} dt$ existe.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-(xt)^2} dt$.

Exercice 17 On définit la fonction f sur $[0,1]$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \text{ et } f(1) = \ln 2 \\ f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \quad \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien définie sur $[0,1]$.
2. a) Pour tout réel x de $]0,1[$, calculer $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$.
   b) Établir que, pour tout réel x de $]0,1[$, on a : $x^2 \ln 2 \leq f(x) \leq x \ln 2$.
   c) En déduire que f est continue sur $[0,1]$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0,1[$, puis déterminer ses variations.

Exercice 18 Le but de l'exercice est de démontrer le théorème des séries alternées : si (a_n) est une suite décroissante de réels positifs qui tend vers 0, alors la suite (S_n) définie pour $n \geq 0$ par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

est convergente. On pose pour $n \geq 0$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

1. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
3. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq \ell \leq u_n$.
4. On suppose pour toute la suite de l'exercice que $a_n = \dfrac{1}{n+1}$. Donner un algorithme donnant un encadrement de ℓ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-6}.
5. Dans cette question, on va prouver que $\ell = \ln 2$.
   a) On pose, pour $n \geq 1$,
   $$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$
   Démontrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante puis qu'elle tend vers 0.

b) Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, justifier l'égalité

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}.$$

c) Conclure.

Exercice 19 On pose, si n et p sont des entiers naturels :

$$I(n,p) = \int_0^1 (1-x)^n x^p dx$$

1. Trouver une relation entre $I(n,p)$ et $I(n+1,p-1)$.
2. En déduire la valeur de $I(n,p)$.

Exercice 20 (Un classique à savoir faire : Intégrales de Wallis)
On pose, si $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\, dt$$

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers un réel l.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\, dt$.
   En déduire la valeur de u_2 (on utilisera une égalité classique).
4. Calculer u_3.
5. Établir une relation de récurrence entre u_n et u_{n-2} pour $n \geq 2$.
6. En déduire une expression de u_{2n} et u_{2n+1} à l'aide de factorielles, de puissances de 2 et de π.
7. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{2n} \cdot u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$$
8. En déduire la valeur de l.
9. Montrer que $u_{2n} \sim u_{2n+1}$ puis le fait que :
$$u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$