Chapitre 19 : applications linéaires
Feuille d'exercices

Exercice 1 Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Déterminez leur noyau dans le cas où elles le sont.

1. $f : (x, y, z) \mapsto x - y - 2z$
2. $f : (x, y) \mapsto xy$
3. $f : x \mapsto (-3x, x, 4x)$
4. $f : (x, y, z) \mapsto (x - y, y + z, x - z)$
5. $f : (x, y) \mapsto x + y + 1$
6. $f : (x, y) \mapsto (x - y, 2x + 3y)$.
7. $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.
8. $f : (x, y, z, t) \mapsto (x + 2y + z, z - x - t)$

Exercice 2

1. Justifiez que les applications ci dessous sont linéaires :
   (a) $\phi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ définie par $\phi(f) = f'$.
   (b) $\psi : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ définie par $\psi(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$
2. Montrez que $\phi \circ \psi = Id_{\mathcal{C}^0}$.
3. Montrez que malgré tout ni ϕ, ni ψ ne sont bijectives.

Exercice 3 (La trace matricielle) Pour une matrice carré réelle $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on définit l'application trace par $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1. Posons
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Calculer $Tr(A)$, $Tr(B)$ et $Tr(A + B)$.
2. Montrer que l'application trace est linéaire.

Exercice 4 Soit f l'homothétie de rapport $\alpha \in \mathbb{R}^*$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y) = \alpha(x, y)$.

1. Montrer que c'est une application linéaire.
2. Déterminer Ker f.
3. Soit $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, représenter graphiquement son antécédent par f. En déduire $\mathrm{I}mf$.

Exercice 5 Soit f une application linéaire d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E vers un $\mathbb{R}$-espace vectoriel F. Montrer que pour toute partie A de E, on a $f(\mathrm{Vect}\, A) = \mathrm{Vect}(f(A))$.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[x]$.
Soit f définie sur E par $f(P) = P + (1 - x)P'$

1. Montrez que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminez son noyau.

Exercice 7 Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Montrer que $g \circ f = 0$ si, et seulement si, $\mathrm{Im}\, f \subset \ker g$.

Exercice 8 Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Comparer $\ker f \cap \ker g$ et $\ker(f + g)$.
2. Comparer $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$ et $\mathrm{Im}(f + g)$.
3. Comparer $\ker f$ et $\ker f^2$.
4. Comparer $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f^2$.

Exercice 9 Soient $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$f \circ g = h, g \circ h = f \text{ et } h \circ f = g$$

1. Montrer que $f,\ g,\ h$ ont même noyau et même image.
2. Montrer $f^5 = f$.
3. En déduire que l'image et le noyau de f sont supplémentaires dans E.

Exercice 10 Soit f un projecteur de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} - f$ est aussi un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\ (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} - f) = \mathrm{Im}\ f$.
3. En déduire que $\mathrm{Ker}\ f$ et $\mathrm{Im}\ f$ sont supplémentaires.
4. Soit p définie sur $\mathbb{R}^2$ par $p(x, y) = (x, x)$.
   (i) Montrer que c'est une projection.
   (ii) Déterminer graphiquement sur quelle droite projette p
   (iii) Déterminer graphiquement sur quelle droite projette $\mathrm{Id} - p$

Plus dur

Exercice 11 Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On se donne $f \in \mathcal{L}(E, F)$, une famille $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ de sous-espaces vectoriels de E et une famille $(F_j)_{1 \leq j \leq p}$ de sous-espaces vectoriels de F.

1. Montrer
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(E_i\right)$$
2. Montrer que si f est injective et si la somme des E_i est directe alors la somme des $f\left(E_i\right)$ est directe.
3. Montrer
$$f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{p} F_j\right) \supset \sum_{j=1}^{p} f^{-1}\left(F_j\right)$$
Montrer que cette inclusion peut être stricte. Donner une condition suffisante pour qu'il y ait égalité.

Exercice 12 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}$.

1. Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g$.
2. Montrer
$$E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, g$$
3. Dans quel cas peut-on conclure $g = f^{-1}$?
4. Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractériser $g \circ f$

Exercice 13 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient f et g des endomorphismes de E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Ker}(g) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0_E\}$.
2. $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(g) = E$.
3. En déduire que $f \circ g$ est un automorphisme si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) = E$, $\mathrm{Ker}(g) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g) = E$.