TD0

Révisions : Suites, fonctions, polynômes

Dans ce TD, vous verrez une indication de la difficulté pour chaque exercice, avec des étoiles de 1 (très simple, application directe de la méthode et calcul simple) à 5 (si vous arrivez les 3 étoiles, vous êtes déjà au point pour beaucoup des questions de concours, et les 5 étoiles sont vraiment pour les parisiennes).

1 Suites

Exercice 1.1 (Suite arithmético-géométrique(★))

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = -u_n + 4. \qquad (1)$$

Déterminer l'expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1.2 (SRL2 - Suite de Fibonacci(★))

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Déterminer une expression explicite de F_n en fonction de n.

Exercice 1.3 (En revenant à la définition de la limite(★★))

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq b \\ u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\to} a + b \end{cases}$$

Montrer que:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\to} a \quad \text{et } v_n \underset{n\to+\infty}{\to} b$$

Exercice 1.4 (Suites adjacentes (★★★))

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies pour tout entier n non nul par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1} \text{ et } v_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$
2. En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 1.5 (Étude d'une suite récurrente d'ordre 1 - Edhec 2016 (★★★))

Une *suite récurrente d'ordre 1* est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où f est une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'étude de telles suites est fréquente aux concours.
Dans cet exercice, on étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}.$$

1. Soit $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

   Étudier les variations de f, puis représenter la courbe représentative de f ainsi que les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) Montrer que $[1,2]$ est un intervalle stable pour f, c'est à dire $f([1,2]) \subset [1,2]$.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,2]$.

   (c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[1,2]$. On note α cette solution qu'on n'essaiera pas de déterminer.

   (d) Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (e) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

   (f) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def suite(n)` qui calcule le terme d'indice n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Approximation de α.

   (a) Montrer que pour tout $x, y \in [1,2]$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|x-y|$.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$.

   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$.

   (d) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

   (e) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def approx(eps)` qui renvoie une approximation de α à `eps` près.

Une *suite implicite* est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels dont chacun des termes u_n est solution d'une équation du type

$$f_n(x) = 0 \qquad (E_n)$$

où $f_n : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Il n'est en général pas possible de résoudre explicitement l'équation (E_n). On ne connait donc pas en général la valeur de u_n. On dit que ces termes sont définis implicitement.
L'étude de suites implicites est fréquente aux concours, comme en 2018 à l'Edhec avec l'exercice suivant.

Exercice 1.6 (Étude d'une suite implicite - Edhec 2018 (★★★))
La lettre n désigne un entier naturel non nul.
Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une seule solution, notée u_n.

2. (a) Vérifier que u_n appartient à $]0,1[$.

   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (c) Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite appartient à $[0,1]$.

   (d) Montrer par l'absurde que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut 1.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.

   (a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -n\,v_n$.

(b) Établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{n\,v_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$ et en déduire que : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

(c) Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

4. Donner la nature des séries de termes généraux v_n et v_n^2.

---

2 Fonctions

Exercice 2.1 (Développements limités et calcul de limites(★))

1. Déterminer le développement limité des fonctions suivantes :

   (a) $f : x \mapsto \ln(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de e ;

   (b) $f : x \mapsto \cos(x)e^{-x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 ;

   (c) $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)^2}{x^2}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0 ;

   (d) $f : x \mapsto \dfrac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

2. Calculer les limites suivantes :

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$;

   (b) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\cos(2\pi x)-1}{\ln(x)+1-x}$.

Exercice 2.2 (Étude de la fonction x^x (★))

On définit sur $I =]0,+\infty[$ la fonction $f : x \mapsto x^x = e^{x\ln(x)}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note toujours f ce prolongement.

3. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$?

Exercice 2.3 (Inégalités et convexité (★))

À l'aide des propriétés de convexité ou concavité des fonctions, montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1+x$;

2. $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ln(x) \leq x-1$;

3. $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\quad \dfrac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x.$

4. $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ 1-\dfrac{2x}{\pi} \leq \cos(x) \leq 1.$

Exercice 2.4 (Convexité et trigonométrie (★★))

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,2\pi]$ et convexe sur cet intervalle. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)dt \geqslant 0$$

Exercice 2.5 (Inégalité de Jensen (★★★★★))

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et convexe. Démontrer que

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(t))dt.$$

Indication : On pourra faire apparaître des sommes de Riemann.

Exercice 2.6 (Ecricome 2004 (★★))

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

Partie 1. Étude de la bijection réciproque de f.

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans l'intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.
2. Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}.
3. Justifier que pour tout $x \in J$, $\begin{cases} \cos(f^{-1}(x)) = \dfrac{1}{x} \\ \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} \end{cases}$.
4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que :
$$\forall x \in J \setminus \{1\},\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$
5. En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

Partie 2. Étude des dérivées successives de f.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I. On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f sur I.
2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que :
$$\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$
3. Déterminer les polynômes P_1 et P_2.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P_{n+1}(x) = (1-x^2)P_n'(x) + (n+1)xP_n(x)$.
En déduire le polynôme P_3.
5. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.

Exercice 2.7 (Calcul de l'intégrale de Gauss (★★★))

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$ existe.
2. On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}dt$$
   (a) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange à φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = e^{-x\left(1+t^2\right)}$ entre h et 0 , montrer que
$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall h \in [-1,1], \forall t \in [0,1], \left|e^{-h\left(1+t^2\right)} - 1 + h\left(1+t^2\right)\right| \leqslant Mh^2$$

(b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^*$,

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x\left(1+t^2\right)}dt\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_0^1 \frac{e^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\left(e^{-h\left(1+t^2\right)} - 1 + h\left(1+t^2\right)\right)dt\right|$$

(c) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -\int_0^1 e^{-x\left(1+t^2\right)}dt$$

3. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f\left(x^2\right) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2$ est constante.

4. (a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{4}e^{-x}$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

(b) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$.

3 Polynômes

Exercice 3.1 (Division euclidienne et application aux matrices (★★))
Soit $P(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$ et $Q(X) = X^2 - 3X + 2$.

1. Factoriser les polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X)$:

$$P(X) = Q(X) \cdot R(X) + S(X)$$

où R et S sont le quotient et le reste.

3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $Q(A)$.

4. En utilisant la relation de la division euclidienne, calculer $P(A)$.

5. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $Q(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3.2 (Polynômes de Tchebychev - ✍)
On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \text{ et } P_1(x) = x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - P_n(x) \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la parité, le degré ainsi que le coefficient dominant de P_n.

2. (a) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.

(b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre sur $[0, \pi]$ l'équation $\cos(n\theta) = 0$.

(b) En déduire que P_n est scindé dans $\mathbb{R}$ et déterminer ses racines.

(c) Donner alors une expression factorisée de $P_n(x)$.

(d) En calculant $P_n(0)$ de deux manières différentes, montrer que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
