TD1

Compléments d'algèbre linéaire

Méthode du pivot, rang et inverse

Exercice 1.1 (★)

1. Résoudre le système $(\mathscr{S}_0) : \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+2z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$

2. On considère le système $(\mathscr{S}) : \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y+2z=5 \\ x+2y+z=4 \end{cases}$

   Vérifier que $(1,1,1)$ est solution de $(\mathscr{S})$ et en déduire toutes les solutions de $(\mathscr{S})$.

Exercice 1.2 (★)

Calculer le rang et l'inverse s'il existe des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.3 (★★)

Déterminer le rang des matrices suivantes, en discutant suivant les valeurs du paramètre réel α :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha \\ 1 & 1 & -\alpha^2 \end{pmatrix}. \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha & 2 \\ 2 & \alpha & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.4 (★★ - Matrices de rang 1 - Un classique)

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

1. On souhaite montrer qu'il existe une matrice colonne non nulle $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et une matrice ligne non nulle $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $M = CL$.

   (a) *Exemple.* Prenons $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer $C \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ tels que $M = CL$.

   (b) *Cas général.* Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M.
   Montrer qu'il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, il existe $\ell_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j = \ell_i C_i$.
   Conclure.

2. Montrer que $LC = \mathrm{Tr}(M)$, puis en déduire que $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$.

Exercice 1.5 (★★★ - Matrices à diagonale strictement dominante)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$, et soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$.

Montrer que $x_{i_0} = 0$, et en déduire que A est inversible.

Exercice 1.6 (★★★ - Matrices par blocs)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que M est inversible si et seulement si $A - I_n$ et $A + I_n$ le sont.

Famille, Rang, Bases

Exercice 1.7 (★ Famille libre dans un espace de fonctions)
On définit les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \cos(x), f_2(x) = x\cos(x), f_3(x) = \sin(x) \text{ et } f_4(x) = x\sin(x).$$

La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est-elle une famille libre de l'espace vectoriel $\mathcal{F}([0, 2\pi]), \mathbb{R})$?

Exercice 1.8 (★ Famille libre dans un espace de fonctions bis)
Soit n un entier naturel non nul. On définit $\forall k \in [\![0,\, n]\!]$, la fonction f_k sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = e^{kx}$$

Montrer que la famille $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 1.9 (★★ - Polynômes de Lagrange et matrices de Vandermonde - Un classique !)
Soient $a_0, \ldots, a_n$ $n+1$ réels distincts deux à deux. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on pose :

$$L_i : x \mapsto \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - a_k}{a_i - a_k} = \frac{x - a_0}{a_i - a_0} \times \cdots \times \frac{x - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} \times \frac{x - a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} \times \cdots \times \frac{x - a_n}{a_i - a_n}.$$

1. Pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, calculer $L_i(a_j)$ (*on pourra distinguer les cas $i = j$ et $i \neq j$*).
2. Montrer que $\mathscr{B} = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. Si $P \in \mathbb{R}_n[x]$, exprimer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$ en fonction de P.
4. Notons $\mathscr{C} = (1, x, \ldots, x^n)$. Écrire la matrice $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$.
5. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \ldots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, les a_i sont deux à deux distincts.

Exercice 1.10 (★★★)
Montrer que la matrice carrée d'ordre n, $A = (\sin(i + j))$ est de rang au plus 2.

Opérations matricielles

Exercice 1.11 (★★ - Matrices stochastiques - Assez classique)

Une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}$ est un réel positif ou nul, et si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. On note $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1. Donner des exemples de matrices stochastiques.
2. Soit $\lambda \in [0,1]$. Montrer que si A et B appartiennent à $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$, alors $\lambda \cdot A + (1-\lambda) \cdot B$ est dans $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$ également.

   Un ensemble satisfaisant une telle propriété est dit convexe.
3. (a) Notons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que : $A \in \mathcal{ST}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i,j, a_{i,j} \geq 0 \\ AX = X \end{cases}$.

   (b) En déduire que si A et B sont stochastiques, alors $A \times B$ est stochastique.
4. (★) Déterminer les matrices A de $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$ qui sont inversibles et telles que $A^{-1} \in \mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1.12 (★★ - Produit de matrices élémentaires - Un classique à savoir faire absolument!)

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit pour tout $1 \leq i,j \leq n$ la matrice $E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ où l'unique coefficient non nul égal à 1 est en position (i,j). Les $n \times p$ matrices $E_{i,j}$ sont appelées *matrices élémentaires*.

Montrer la formule suivante :

$$E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} \cdot E_{i,l}$$

où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker : $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$, 0 si $j \neq k$.

Exercice 1.13 (★★ - Un classique à savoir refaire!)

Soit $t \in \mathbb{R}^*$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & t & t^2 \\ \frac{1}{t} & 0 & t \\ \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de cette matrice.
2. En utilisant le théorème de division euclienne, calculer $\forall n \in \mathbb{N}, A^n$.

Exercice 1.14 (★★★ - Centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$)

On considère l'ensemble suivant (appelé le *centre de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) :

$$\mathscr{Z}_n = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A \times M = M \times A\}.$$

1. Proposer deux matrices appartenant à $\mathscr{Z}_n$.
2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ appartient-elle à $\mathscr{Z}_2$?

3. On souhaite déterminer l'ensemble $\mathscr{Z}_n$. Considérons pour cela une matrice M appartenant à $\mathscr{Z}_n$.
   (i) Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, calculer $E_{i,j} \times M$ et $M \times E_{i,j}$.
   (ii) En déduire que M est une matrice scalaire, c'est-à-dire de la forme $\lambda \cdot I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (iii) Conclure.

Exercice 1.15 (★★★ - Matrices triangulaires supérieures strictes - Presque du cours!)
Le but de cet exercice est de montrer que toute matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente d'ordre $\leq n$.

1. Soit $k \geq 0$ et notons $\mathscr{T}^+_{k,n}(\mathbb{R})$ le sous ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices $A = (a_{i,j})$ telles que :
$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i + k > j.$$
   (i) Identifier $\mathscr{T}^+_{0,n}(\mathbb{R})$, $\mathscr{T}^+_{1,n}(\mathbb{R})$, $\mathscr{T}^+_{m,n}(\mathbb{R})$
   (ii) Soient $k, l \geq 1$. Montrer que si $A \in \mathscr{T}^+_{k,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{T}^+_{l,n}(\mathbb{R})$, alors $A \times B \in \mathscr{T}^+_{k+l,n}(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente, d'ordre de nilpotence $\leq n$.
3. La réciproque est-elle vraie, c'est-à-dire une matrice nilpotente est-elle nécessairement triangulaire supérieure stricte ?

Espaces, sous espaces, somme de sous espaces

Exercice 1.16 (★)
Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x],\ P(x) - (x+1)P'(x) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_2[x],\ P'(0) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[x]$, et en donner une base et la dimension.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 1.17 (★ - Un exo de remise en jambes)
Montrer, dans chacun des cas suivants, que F et G sont deux-sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E :

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ :\ x - y + 2z + t = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, -1, 1, -1))$;
2. $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1, 0)$, $u_4 = (1, 1, 1, 1)$, et $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$, $G = \text{Vect}(u_3, u_4)$;
3. $E = \mathbb{R}[x]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[x]\ ;\ P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[x]$;
4. $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E,\ f \text{ paire}\}$, $G = \{g \in E,\ g \text{ impaire}\}$.

Exercice 1.18 (★★ - Un classique à savoir refaire !)
Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit $u \notin H$. Montrer que :
$$E = H \oplus \text{Vect}(u).$$

Exercice 1.19 (★★★ - Matrices symétriques et antisymétriques de taille n - Classique)

Montrer que $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. En déduire que :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 1.20 (★★★)

Soit $n \geq 1$ fixé. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose $F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[x] \ : \ \forall j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\},\ P(j) = 0\}$.

1. Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[x]$, et que pour $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on a $P \in F_i$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - j)$.
2. Montrer que la somme $F_0 + F_1 + \cdots + F_n$ est directe.
3. En déduire que $\mathbb{R}_n[x] = \bigoplus_{i=0}^{n} F_i$.

Exercice 1.21 (★★★ - Formule de Grassmann - ✍)

Montrer que si F et G sont de dimension finie, alors $F + G$ est aussi de dimension finie, et que :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Exercice 1.22 (★★★★ - Inspiré de QSP HEC 2007)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

   $$F \cup G \text{ est un s.e.v. de } E \quad \Leftrightarrow \quad F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

   En déduire que E n'est pas réunion de deux sous-espaces vectoriels stricts (c'est-à-dire distincts de E).
2. Plus généralement, montrer que E n'est pas réunion finie de sous-espaces vectoriels stricts.

Applications linéaires

Exercice 1.23 (★ Un exemple classique sur l'ensemble des fonctions)

On note $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ et $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les applications définies pour tout $f \in E$ par

$$\varphi_1(f) = \int_{-1}^{0} f(t)dt, \varphi_2(f) = \int_{0}^{1} f(t)dt \text{ et } \varphi_3(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt$$

1. Montrer que $\forall i \in [\![1, 3]\!], \varphi_i$ est une forme linéaire sur E.
2. La famille (φ_1, φ_2) est-elle libre?
3. La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est-elle libre?

Exercice 1.24 (★★★ - Un deuxième vu l'an dernier)
On considère $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$ on définit $\varphi(f)$ par la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \varphi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \text{ et } \varphi(f)(0) = f(0)$$

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. φ est-elle injective?
3. Montrer que φ n'est pas surjective. Qu'en déduisez-vous?

Exercice 1.25 (★ Et un sur l'ensemble des suites)
Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des suites réelles). On définie l'application S par $\forall u \in E, S(u) = v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1}$$

1. Montrer que S est un endomorphisme.
2. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 1.26 (★★ - Un classique à savoir refaire !)
Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$. On considère les ensembles :

$$F = \left\{P \in E \mid \int_0^1 P(t)dt = 0\right\} \text{ et } G = \{P \in E \mid P' = 0\}$$

1. Justifier que $G = \mathbb{R}_0[x]$.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
3. Soit $k \in \{1, \dots n\}$. Déterminer une constante réelle a telle que $(x \mapsto x^k - a) \in F$. Cette constante est-elle unique?
4. En déduire une base et la dimension de F.
5. Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 1.27 (★★ - Noyaux et Images)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, f et g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que
$$\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g).$$
En déduire que $rg(f+g) \leqslant rg(f) + rg(g)$.
2. On suppose que $f \circ g = 0$ et que $f + g$ est bijectif.
   (a) Montrer que $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$.
   (b) En déduire que $\text{rg}(f) + rg(g) = n$.

Exercice 1.28 (★★ - Un endomorphisme sur les matrices)
Soit $D = \text{diag}\,(d_1, \cdots, d_n)$ une matrice réelle diagonale avec $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n$. Soit $u : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto MD - DM$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 1.29 (★★ - Endomorphismes Nilpotents - Un classique à comprendre!!)
Soit E de dimension finie n. On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est *nilpotent* s'il existe $p \geq 1$ tel que :

$$f^p = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

L'entier p s'appelle alors *l'indice de nilpotence de* f.

On suppose dans la suite que f est un endomorphisme nilpotent d'indice p.

1. (a) f peut-il être bijectif ?
   (b) Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est libre.
   (c) En déduire que $f^n = 0$.
2. On suppose dans cette question que $p = n$. Déterminer le rang de f.
3. Montrer que $\mathrm{Id}_E - f$ est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 1.30 (★★★ - Noyaux et images itérés - Un classique à comprendre!!)
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme non nul. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k = \mathrm{Ker}(u^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(u^k)$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k et I_k sont des sous-espaces vectoriels de E stables par u satisfaisant $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.
2. (a) On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $N_r = N_{r+1}$. Montrer que pour tout $k \geq r$, $N_r = N_k$.
   (b) En déduire qu'il existe un entier $p \leq n$ tel que $\begin{cases} \forall k \in [\![0, p-1]\!], & N_k \neq N_{k+1} \\ \forall k \geq p, & N_k = N_{k+1} \end{cases}$.
   (c) Montrer qu'on a aussi $\begin{cases} \forall k \in [\![0, p-1]\!], & I_k \neq I_{k+1} \\ \forall k \geq p, & I_k = I_{k+1} \end{cases}$.
3. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$, puis que l'endomorphisme induit par u sur N_p est nilpotent et préciser son ordre de nilpotence, et l'endomorphisme induit par u sur I_p est un automorphisme de I_p.

Exercice 1.31 (★★★ - Oral ESCP 2019)
Soient deux entiers $n \geq 1$ et $k \geq 2$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soient $p_1, p_2, \ldots, p_k$ des endomorphismes de E tous non nuls et tels que :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(p_1) + \mathrm{rg}(p_2) + \cdots + \mathrm{rg}(p_k) \leq n.$$

1. Montrer que $E = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \mathrm{Im}(p_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(p_k)$.
2. Montrer que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, l'endomorphisme p_i est un projecteur de E, et que pour tout couple $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$ vérifiant $i \neq j$, on a : $p_i \circ p_j = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
3. Montrer que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, p_i est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p_i)$ parallèlement à $K_i = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \mathrm{Im}(p_j)$.

Exercice 1.32 (★★★★)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence :

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2).$$

Changement de bases

Exercice 1.33 (★)
Considérons la matice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.
On considère les vecteurs $f_1 = (1, -1, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0)$ et $f_3 = (0, 0, 1)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ et déterminer son inverse.
3. Soit $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ en fonction de a, b et c.
4. Déterminer la matrice T de u dans la base $\mathscr{B}$.
5. En déduire T^n puis M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.34 (★★)
Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[x]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}[x]$, qui à un polynôme P associe $\varphi(P) = (x^2 - 1)P' - 2xP$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique, notée $\mathscr{B}_{can}$.
3. On pose $P_1 = (x+1)^2$, $P_2 = x^2 - 1$, $P_3 = (x-1)^2$. Montrer que $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$, puis donner la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}$.
4. En déduire la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice de φ^n dans la base $\mathscr{B}$. En déduire la matrice de φ^n dans la base canonique.

Exercice 1.35 (★★)
On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (A, B, C, D)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(M) = AM - MA$.
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ puis dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 1.36 (★★★ - VanderMonde - Un classique à savoir refaire !)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On définit l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[x] &\to \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\mapsto \varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)). \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est linéaire.

2. Montrer que φ est un isomorphisme.
3. En déduire que pour tout $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $\forall i \in \{0, \dots, n\}, Q(a_i) = b_i$.
4. (a) Écrire la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
   (b) En déduire que la matrice de Vandermonde $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_n^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.
5. Soit $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ des réels deux à deux distincts.
   (a) Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ vérifiant
   $$\forall i \in [\![0,n]\!] L_i \in \mathbb{R}_n[x] \text{ et } \forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2 L_i(a_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$
   (b) Donner $\forall i \in [\![0,n]\!], \forall x \in \mathbb{R}$, l'expression de $L_i(x)$.
6. Notons $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ la famille des polynômes de Lagrange associés aux réels $(a_0, \dots, a_n)$.
   (a) Calculer $\varphi(L_i)$.
   (b) Retrouver alors que φ est un isomorphisme, et que $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 1.37 (★★★)
Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Matrices semblables

Exercice 1.38 (★ - Matrices semblables - Propriétés bonnes à connaître)
1. Montrer les propriétés suivantes pour des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:
   - *Réflexivité :* A est semblable à A
   - *Symétrie :* [A est semblable à B] $\Leftrightarrow$ [B est semblable à A]
   - *Transitivité :* [A est semblable à B] et [B est semblable à C] $\Rightarrow$ [A est semblable à C]

   On dit que « être semblable à » est une *relation d'équivalence*.
2. Montrer que si A et B sont inversibles et semblables, alors A^{-1} et B^{-1} sont aussi semblables.

Exercice 1.39 (★★★★ - QSP HEC 2021)
Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Trace

Exercice 1.40 (★)
Montrer qu'il n'existe pas deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A \times B - B \times A = I_n$.

Exercice 1.41 (★★ - Trace d'un endomorphisme - Un classique à comprendre!!)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit f un endomorphisme de E et soit $\mathscr{B}$ une base de E. Montrer que le scalaire $\mathrm{Tr}(M_{\mathscr{B}}(f))$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.

   Ce scalaire est appelée la *trace de* f et notée $\mathrm{Tr}(f)$.

2. Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et considérons l'application $u_A : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $u_A(M) = AM$.
   (a) Montrer que u_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer $\mathrm{Tr}(u_A)$.

3. Soit p un projecteur de E. Montrer que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Exercice 1.42 (★★)
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n. On suppose que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{Tr}(f) = 1$.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que :
$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que f est un projecteur.

Exercice 1.43 (★★★ - Formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi_A(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.
   Montrer que φ_A définit une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On considère l'application $\Phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ définie par $\Phi(A) = \varphi_A$.
   (a) Montrer que Φ est linéaire.
   (b) Montrer que Φ est un isomorphisme.
   Indication. On pourra calculer $\varphi_A(E_{i,j})$ où $E_{i,j}$ est la matrice élémentaire d'indice (i,j).
   (c) En déduire que pour toute forme linéaire φ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Déterminer toutes les formes linéaires φ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ satisfaisant :
$$\forall M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(MN) = \varphi(NM).$$

Polynômes d'une matrice

Exercice 1.44 (★)
Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ avec :

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

- $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$;

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.45 (★)
Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ est un polynôme annulateur de A.
2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} comme un polynôme en A.

Exercice 1.46 (★★)
Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. **Première méthode : calcul des puissances de A à l'aide d'un polynôme annulateur.**
   (a) Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de A.
   (b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{R}$ tels que $A^p = \alpha_p A + \beta_p I_3$.
   (c) Déterminer une relation de récurrence satisfaite par α_p et β_p. En déduire α_p et β_p en fonction de p.
   (d) En déduire A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
2. **Deuxième méthode : calcul des puissances de A par la formule du binôme.**
   (a) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer J^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.47 (★★)
On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P : x \mapsto x^3 - 2x^2 + x$ est un polynôme annulateur de B.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $Q_n \in \mathbb{R}[x]$ et $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = P(x)Q_n(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n.$$
3. Déterminer a_n, b_n, c_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de B^n en fonction de n.

Exercice 1.48 (★)
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

2. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ ainsi que D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Mêmes questions avec les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.49 (★★★ - Polynôme annulateur d'une matrice diagonale - ✍)
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ $(r \leqslant n)$ des réels distincts deux à deux et $(m_1, \dots, m_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que :

$$m_1 + \cdots + m_r = n$$

On pose $D = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1 \text{ termes}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{m_2 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{m_r \text{ termes}}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que :
$$\forall P \in \mathbb{R}[x],\ P(D) = \text{diag}(\underbrace{P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_1)}_{m_1 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{P(\lambda_r), \dots, P(\lambda_r)}_{m_r \text{ termes}})$$
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que P soit un polynôme annulateur de D.
3. On suppose que A est semblable à D. Déterminer un polynôme annulateur de A.
4. À l'aide de l'exercice précédent, déterminer un polynôme annulateur de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 1.50 (★★★ - QSP ESCP 2016)
Soit N une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ nilpotente, i.e. telle qu'il existe $p \geq 1$ tel que $N^p = 0$.

1. Montrer que la matrice $A = I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que $I_n - A^{-1}$ est nilpotente.

Polynômes d'endomorphismes

Exercice 1.51 (★)
Déterminer un polynôme annulateur et l'inverse s'il existe des endomorphismes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^tA + 2A \end{array}.$$

$g : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \varphi(x)u + x \end{array}$ où E est un espace vectoriel, $u \in E$ et φ est une forme linéaire telle que $\varphi(u) = 1$.

Exercice 1.52 (★★)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $2f^2 - 3f - 9\text{Id}_E = 0$.
On pose alors $u = 2f + 3\text{Id}_E$ et $v = f - 3\text{Id}_E$.

1. Calculer $u - 2v$. En déduire que $E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.
2. Calculer $u \circ v$ et $v \circ u$. En déduire que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v)$.
4. (Cubes) En déduire que f est diagonalisable.
