TD3

Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation

Valeurs propres, vecteurs propres

Exercice 9.1 (★)

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_2[x]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[x], \quad u(P) = (x^2+1)P'' + 2xP'.$$

1. Justifier que u est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Montrer que 1 et x sont des vecteurs propres de u. À quelles valeurs propres sont-ils associés ?
3. Montrer que 6 est une valeur propre de u.
4. u admet-il d'autres valeurs propres ? Déterminer les sous-espaces propres de u.
5. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[x]$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 9.2 (★)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ défini par $f(P) = -P''(1) + 2P'(1)(x-1) - 2P(1)(x-1)^2$.
On pose $Q_1 = 1$, $Q_2 = x-1$ et $Q_3 = \dfrac{1}{2}(x-1)^2$.

1. Vérifier que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Montrer que (Q_1, Q_2, Q_3) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$ et déterminer la matrice de f dans cette base.
3. Montrer que 2 et -2 sont des valeurs propres de f et déterminer les dimensions des sous-espaces propres E_2 et E_{-2} associés.
4. L'endomorphisme f peut-il admettre d'autres valeurs propres ?
5. Montrer que $E_2 \oplus E_{-2} = \mathbb{R}_2[x]$ et déterminer une base de $\mathbb{R}_2[x]$ où la matrice de f est diagonale.

Exercice 9.3 (★)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.
Montrer que $\mathrm{Sp}(A^{-1}) = \left\{\dfrac{1}{\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\right\}$, et que pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $E_\lambda(A) = E_{1/\lambda}(A^{-1})$.

Exercice 9.4 (★)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, et $x \in E$, $x \neq 0_E$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\mathrm{Vect}(x) \text{ est stable par } f \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ est un vecteur propre de } f$$

Exercice 9.5 (★★)

Soient f un endomorphisme d'un R-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $0 \in \mathrm{Sp}(f^n)$. Montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(f)$.

Exercice 9.6 (★★ - Matrices stochastiques - D'après EML 2010 - ✍)
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

1. Soit $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1. Calculer AV et en déduire une valeur propre de A.
2. Soit λ une valeur propre de A, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ. Soit $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_i| = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|$.
   (a) Montrer que $|\lambda x_i| \leq |x_i|$.
   (b) En déduire que $|\lambda| \leq 1$, et que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset [-1,1]$.

Exercice 9.7 (Ecricome 1998 ★★)
Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}$. A toute fonction f de E, on associe la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_x^{x+1} f(t)t$$

1. Montrer que F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.$\forall x \in \mathbb{R}$, calculer $F'(x)$.
2. Déterminer F dans les cas suivants:
   (a) $f(x) = \sin(2\pi x)$;
   (b) $f(x) = \begin{cases} 1-x \text{ si } x < 1 \\ \sqrt{x-1} \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$
3. Soit T l'application de E dans lui-même définie par : $T(f) = F$
   (a) Montrer que T est linéaire.
   (b) Est-elle injective? surjective?
   (c) i. Montrer que 0 est valeur propre de T.
   ii. Montrer que pour tout réel a, la fonction $x \mapsto e^{ax}$ est une fonction propre associée à une valeur propre $\lambda(a)$ que l'on déterminera.
   iii. Étudier les variations de cette fonction λ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que tout réel positif est valeur propre de l'application T.

Exercice 9.8 (★★)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $fof = -2f$.

1. Justifier que $Sp(f) \subset \{-2, 0\}$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}\,(f + 2Id_E)$.
4. En déduire qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 9.9 (Oraux HEC sans préparation 2012 ★★★)
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$. Soit T l'application qui à toute fonction $f \in E$ associe la fonction $F = T(f)$ définie par :

$$F(0) = f(0) \text{ et } \forall x > 0, F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif?
2. Déterminer les réels λ et les fonctions f non nulles vérifiant $T(f) = \lambda f$.

Exercice 9.10 (★★★ - QSP HEC 2012)
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$. Soit T l'application qui à toute fonction $f \in E$ associe la fonction $F = T(f)$ définie par : $F(0) = f(0)$ et $\forall x > 0$, $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?
2. Déterminer les réels λ et les fonctions f vérifiant $T(f) = \lambda f$.

Exercice 9.11 (★★★★ - QSP HEC 2014)
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ est un projecteur.
2. Quelles sont les valeurs propres de f ?
3. Combien existe-t-il de droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?
4. Combien existe-t-il de plans vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?

Recherche des éléments propres

Exercice 9.12 (★)
Déterminer les éléments propres des matrices suivantes (on les étudiera dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$ lorsque cela a un sens). On pourra vérifier ses calculs sur `Python` à l'aide de la commande `al.eig(A)` (de la librairie `numpy.linalg`) qui donne les valeurs propres d'une matrice `A`.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & -7 & 6 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.13 (★)
Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A et B ont même rang, même trace, mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension.
2. Calculer $(A-2I_4)^2$ et $(B-2I_4)^2$. En déduire que les matrices A et B ne sont pas semblables.

Exercice 9.14 (★)
Déterminer sans calcul les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.15 (★)
Soit $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer ses éléments propres.

Exercice 9.16 (★★ - ✍)
Soit $n \geq 2$ et soit $J_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Déterminer $\mathrm{Sp}(J_n)$.
2. Montrer que J_n est semblable à une matrice diagonale dont on précisera les coefficients diagonaux.

Exercice 9.17 (★★)
Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ et soit a un réel non nul. On note f l'application définie sur E par $f(P) = (x-a)P'$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Écrire la matrice de f dans la base canonique de E. En déduire que f admet $n+1$ valeurs propres distinctes que l'on notera $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.
3. Soit P_k un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_k.
   (a) Déterminer $\deg(P_k)$.
   Indication. On identifiera le coefficient dominant dans l'égalité $f(P_k) = \lambda_k P_k$.
   (b) On note r_k l'ordre de multiplicité de a en tant que racine de P_k, et Q_k tel que $P_k = (x-a)^{r_k} Q_k$.
   Déterminer r_k et en déduire le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_k.

Exercice 9.18 (★★★)
Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $f : E \to E$ l'application qui transforme une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_0 = u_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Exercice 9.19 (★★★)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f et $g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(g \circ f)$ avec $\lambda \neq 0$. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(f \circ g)$.
2. On suppose E de dimension finie. Montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(\,g \circ f) \Longrightarrow 0 \in \mathrm{Sp}(f \circ g)$.

Exercice 9.20 (★★★ - Oral HEC 2010)
Soit $n \geq 2$, et soit M_n a matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $a \in \mathbb{R}$ est valeur propre de M_n si, et seulement si, a est racine du polynôme
$$P_n(X) = X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \cdots - X - 1.$$
2. Déterminer alors le sous-espace propre associé à la valeur a.

Exercice 9.21 (★★★)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$ et soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les valeurs propres de f et la dimension des sous-espaces propres associés.

Valeurs propres et polynômes annulateurs

Exercice 9.22 (★)
1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer $A^4 - 3A^3 + 4A$, et en déduire les éléments propres de A.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Chercher un polynôme annulateur de B. En déduire le spectre de B.

Exercice 9.23 (★)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, montrer que $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.

Exercice 9.24 (★★ - Matrices compagnons - ✍)
Soit P un polynôme unitaire de degré 3 à cœfficients dans $\mathbb{R}$, qu'on note $P = x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0$.
On appelle *matrice compagnon du polynôme* P la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est un polynôme annulateur de M.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est une valeur propre de M si, et seulement si, λ est une racine de P.
3. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{rg}(M - \lambda I_3) \geq 2$. En déduire que chaque sous-espace propre de M est de dimension 1.
4. **Exemples.** Déterminer un polynôme annulateur et les valeurs propres des matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.25 (★★★ - QSP HEC 2015)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Établir l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(f) = 0$.
2. Soit Q un polynôme tel que $Q(f) = 0$ et de degré minimal parmi les polynômes non nuls tels que $P(f) = 0$.

   Montrer que toute racine réelle de Q est valeur propre de f.

Exercice 9.26 (★★★★ - Oral ESCP 2012)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre.

   Indication : On pourra commencer par remarquer que si P est un polynôme annulateur non nul de A, alors $\deg(P) \geq n$.
2. On note $\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad AM = MA\}$. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension supérieure ou égale à n.
3. Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice $\Delta \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que :
$$A = P\Delta P^{-1}.$$
4. Soit $M \in \mathscr{C}$. Montrer que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de M.

   En déduire que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.

   En déduire que $\mathscr{C}$ est de dimension inférieure ou égale à n.
5. Montrer que $(I, A, \dots, A^{n-1})$ est une base de $\mathscr{C}$.
6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. On note $\mathscr{R} = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad M^2 = A\}$.
   (a) Montrer que $\mathscr{R} \subset \text{Vect}(I, A)$.
   (b) Montrer que $\mathscr{R}$ est de cardinal 4, et déterminer les 4 matrices M vérifiant $M^2 = A$.

Diagonalisation

Exercice 9.27 (★)

À l'aide des commandes `al.eig(A)[0]` et `al.matrix_rank(A)` de la librairie `numpy.linalg` donnant le spectre et le rang d'une matrice A, déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.28 (★)

Déterminer par le moins de calcul possible si les matrices suivantes sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.29 (★)

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$? Si oui, les diagonaliser et expliciter la matrice de passage. Afin de vérifier ses calculs sur `Python`, on pourra utiliser la commande `al.eig(A)` qui à A associe deux valeurs, un vecteur contenant les valeurs propres d'une part, une base des sous-espaces propres associés d'autre part.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.30 (★★)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe une matrice Δ diagonale et une matrice P inversible telle que $J = P\Delta P^{-1}$. On explicitera Δ et P.
2. Écrire M comme combinaison linéaire de I_n et J. En déduire que M est diagonalisable, et déterminer une matrice diagonale semblable à M.

Exercice 9.31 (★★)

Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathscr{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ où $f_k : x \mapsto x^k e^{-x}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

1. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de F. En déduire la dimension de F.
2. Soit D l'application définie sur F par :

   $$\forall f \in F, \quad D(f) = f'$$

   où f' désigne la dérivée première de f.

   Montrer que D est un endomorphisme de F et écrire sa matrice M dans la base $\mathscr{B}$.
3. M est-elle inversible ? diagonalisable ?

Exercice 9.32 (★★)

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par $f(P)(x) = xP'(x+1)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. f est-elle diagonalisable ?

Exercice 9.33 (★★)

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Pour quelles valeurs de a, b et c la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 9.34 (★★★)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $A = M_{\mathscr{B}}(f)$.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \alpha_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$.
2. Montrer que M est diagonalisable si, et seulement si, $\alpha_n \neq 0$.
3. En déduire que f est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Exercice 9.35 (★★★ - QSP HEC 2016 - ✍)
Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes.

Montrer que les matrices A et B commutent si, et seulement si, elles sont diagonalisables avec la même matrice de passage.

Exercice 9.36 (★★★)
Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, $p \in]0,1[$.
Déterminer la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & 0 \\ X+Y & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 9.37 (★★★ - QSP HEC 2021)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On pose $B = A^3 + A + I_n$.
Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $A = Q(B)$.

Exercice 9.38 (★★★ - Oral ESCP 2007)
Soit n un entier naturel non nul et Q un polynôme à coefficients réels de degré $d \leq n$.
On définit l'application suivante :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x] \\ P \mapsto (PQ)^{(n)} \end{cases}$$

où $(PQ)^{(n)}$ indique que l'on prend la dérivée n^{ieme} du produit de P par Q.

1. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Donner une CNS sur le polynôme Q pour que φ soit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. Déterminer une CNS sur le polynôme Q pour que φ soit diagonalisable.

Utilisation de polynômes annulateurs

Exercice 9.39 (★)
Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une relation entre A^2, A et I_3.
2. Montrer que A admet une seule valeur propre λ. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 9.40 (★★)
Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'endomorphisme défini par $f(A) = {}^tA$.

1. Calculer f^2. En déduire un polynôme annulateur de f et les valeurs propres de f.
2. f est-il diagonalisable ?

Exercice 9.41 (★★)
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $a_{i,j} = \dfrac{i}{j}$.

1. Calculer A^2. En déduire un polynôme annulateur de A, puis que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, n\}$.
2. Déterminer $\mathrm{rg}(A)$. En déduire que 0 est valeur propre de A, et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
3. Résoudre le système $AX = nX$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 9.42 (★★ - QSP HEC 2005)
Une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe une puissance $p \in \mathbb{N}^*$ telle que $N^p = 0_n$.
À quelle condition une matrice nilpotente est-elle diagonalisable ?

Exercice 9.43 (★★★ - QSP ESCP 2015)
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$, et a, b deux scalaires distincts. On suppose que :

$$(f - a\,\mathrm{Id}_E)^3 \circ (f - b\,\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad (f - a\,\mathrm{Id}_E)^2 \circ (f - b\,\mathrm{Id}_E) \neq 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Étudier la diagonalisabilité de f.

Exercice 9.44 (★★★★ - Oral ESCP 2011 - ✍)
Soient n un entier supérieur ou égal à 2, et E un espace vectoriel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E. On note id l'endomorphisme identité de E.

On souhaite montrer le résultat suivant :

$$u \text{ diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad u \text{ annule un polynôme scindé à racines simples dans } \mathbb{R}.$$

1. On suppose dans cette question que u est diagonalisable. On note $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ l'ensemble de ses valeurs propres. Montrer que le polynôme $m(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_k)$ est annulateur de u.

   On étudie la réciproque. Supposons dans la suite de l'exercice qu'il existe un polynôme :

   $$P(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_k)$$

   annulateur de u, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ sont des réels distincts.

2. **Résultat préliminaire.** Soient f et g deux endomorphismes de E. En considérant la restriction de f à $\operatorname{Ker}(g \circ f)$, montrer que :

   $$\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \leq \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Ker}(g).$$

3. (a) Montrer que $n \leq \sum_{j=1}^{k} \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_j \operatorname{Id}_E)$.

   (b) En déduire que l'endomorphisme u est diagonalisable.

4. **Applications.**

   (a) Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit F un sous-espace stable par u. Montrer que l'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u sur F est diagonalisable.

   (b) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 est diagonalisable à valeurs propres strictement positives. Montrer que A est diagonalisable.

Applications de la diagonalisation

Exercice 9.45 (★)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 4,\ u_1 = 2,\ u_2 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
3. Calculer $A^3 - 2A^2 - A$. En déduire un polynôme annulateur de A, puis montrer que A est diagonalisable.
4. En déduire qu'il existe trois réels λ, μ, ν tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda + \mu(-1)^n + \nu 2^n$.
5. En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9.46 (★★)

Les matrices suivantes sont-elles semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.47 (★★ - Racine carrée d'une matrice)

Soit $C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que si $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ commute avec C, alors D est diagonale. En déduire que si $D^2 = C$, alors D est diagonale.
2. Déterminer l'ensemble des matrices $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D^2 = C$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble des matrices B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.

Exercice 9.48 (★★★★)

Trouver toutes les matrices $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
