TD4a

Intégrales

Intégration sur un segment

Exercice 4.1 (★)

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{k}{n^2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}(e^{k+n})^{\frac{1}{n}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\sin\dfrac{k\pi}{n}$.

Exercice 4.2 (★★)

1. Montrer que la suite (s_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

est convergente et déterminer sa limite.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_{2n}=s_n$.

3. Montrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis déterminer sa limite.

Exercice 4.3 (★★★)

Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{t^n-t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 4.4 (★★★)

Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f:x\mapsto\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}.$$

On étudiera la parité, les variations, et l'on montrera que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Exercice 4.5 (★★★★ - QSP ESCP 2018)

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 4.6 (★★★★ - Oral ESCP 2013)

Soit f la fonction définie par :

$$f:x\mapsto\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t+\sin(t)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}_f$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
4. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en $x=0$.
   On note $\tilde{f}$ la fonction ainsi prolongée.
5. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $\tilde{f}'(0)$.
6. La fonction $\tilde{f}$ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Nature d'une intégrale généralisée

Exercice 4.7 (★★)

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes.

$$\int_1^{+\infty} e^{-\pi t}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)\sqrt{t}} \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+(t\ln t)^2}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{1+\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^t}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{t})e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{t}}{\sin(2t)-\sin(t)}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 4.8 (★)

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes, et en cas de convergence, calculer leur valeur.

$$\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^{1/2} \frac{1}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\ln(t^2)}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{1}{t^2}\right)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4.9 (★)

Montrer que les intégrales généralisées suivantes convergent et déterminer leur valeur à l'aide d'une intégration par parties.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3}e^{-1/t}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 4.10 (★★ - Exemple d'intégrale généralisée semi-convergente)

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge.
2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\mathrm{d}t$.
   (b) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\mathrm{d}t = 2$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t = +\infty$.
   (d) En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$ diverge.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge mais ne converge pas absolument. Elle est dite *semi-convergente*.

Exercice 4.11 (★)
Déterminer la nature des intégrales suivantes et préciser leur valeur en cas de convergence en utilisant les changements de variable indiqués entre parenthèses.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x \ \text{(poser } t=\ln x\text{)} \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t+1}\,\mathrm{d}t \ \text{(poser } u=e^t\text{)}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{u(1-\ln u)^2}\,\mathrm{d}u \ \text{(poser } u=e^x\text{)} \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\mathrm{d}x \ \text{(poser } u=\sqrt{x}\text{)}$$

Exercice 4.12 (★)
Étudier la nature des intégrales suivantes (on utilisera si nécessaire un changement de variable affine).

$$\int_{-\infty}^0 x^2e^x\,\mathrm{d}x \ ; \ \int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+2x+3}} \ ; \ \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln t}{(1-t)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}t \ ; \ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+12x}\mathrm{d}x.$$

Exercice 4.13 (★★)
1. (a) À l'aide du changement de variable $y=\dfrac{1}{x}$, montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ convergent et sont de valeurs opposées.

   (b) Que peut-on en déduire sur l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$?

2. Soit $a>0$. À l'aide d'un changement de variable, prouver la convergence et déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 4.14 (★★★★ - QSP ESCP 2016)
Soit f une fonction continue sur $[1,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge également.

Exercice 4.15 (★★★★)
1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ converge. On note I sa valeur.
2. À l'aide du changement de variables $u=-\ln(t)$, montrer que $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}-e^{-2u}}{u}\,\mathrm{d}u$.
3. Montrer que $I=\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$.
4. En déduire que $I=\ln(2)$.

Suites et fonctions définies par des intégrales

Exercice 4.16 (★)
On pose

$$\forall n\in\mathbb{N}, I_n=\int_0^1 x^ne^x dx$$

1. En encadrant pour tout entier naturel n le terme I_n, montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. Montrer que pour tout entier naturel n on a
$$I_n = \frac{e}{n+1} - \frac{1}{n+1} I_{n+1}.$$
3. En déduire que la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 4.17 (★)
On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx.$$
1. (a) Déterminer J_1.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (c) En déduire que la suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ converge et donner sa limite.
2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}$.
   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ converge et donner sa limite.

Exercice 4.18 (★★)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}$.
1. Justifier la convergence des intégrales généralisées I_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle converge.
3. Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2n+2} I_n$.
4. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4.19 (★★)
Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^{x+2}}} \mathrm{d}t$.
1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $]0, +\infty[$.
2. Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0, +\infty[$. En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 4.20 (★★)
Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, sous réserve de convergence, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(xt)\ \mathrm{d}t$.
1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale définissant $f(x)$ converge absolument. *Ainsi, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.*
2. Montrer que f est paire et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \Gamma(1/2)$.
3. (a) Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $|\cos(a) - \cos(b)| \leq |a-b|$.
   (b) En déduire que pour tout $(x, x_0) \in \mathbb{R}^2$, on a $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\Gamma(1/2)}{2} |x - x_0|$.
   (c) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.21 (★★★ - Étude d'un reste)

Soit f la fonction définie pour tout $x \in]0,+\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction f est bien définie, préciser ses variations et ses limites en $+\infty$ et en 0.
2. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t$.
   (b) En déduire que pour tout $x > 0$,
   $$\frac{e^{-x}}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}.$$
   (c) Donner un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale $g(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie.
   (b) Montrer que g admet une limite finie lorsque x tend vers 0.
   (c) En déduire que $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln x$.
4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 4.22 (★★★ - Oral ESCP 2019)

On considère l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que cette intégrale est convergente pour tout $x > 0$.
   (b) Montrer que cette intégrale est convergente pour $x = 0$.

   On pose alors, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$.
2. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que :
   $$\forall x > 0,\quad f(x) = \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$
3. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $f''(x)$ pour tout $x > 0$.
   (c) En déduire une relation entre $x, f(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x > 0$.
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 4.23 (★★★★ - Oral ESCP 2025)

1. Montrer que l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ converge pour tout $x > 0$.

   On pose alors pour tout $x > 0, f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$.
2. (a) Montrer qu'il existe un réel a tel que
   $$\lim_{x\to 0^+}(f(x) - f(1) + \ln(x)) = a.$$

   (on remarquera que $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$).

(b) Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

3. On admet que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$$
Calculer $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

Comparaison série intégrale

Exercice 4.24 (★★)

Soit f la fonction définie pour $t \in [2, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t\ln^2(t)}$.

1. Calculer pour tout $x > 2$, $\int_2^x f(t)dt$.
2. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t)dt$?
3. Déterminer le tableau de variations de f.
4. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^2(n)}$.
5. Généraliser ce résultat en déterminant la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^\beta(n)}$, où $\beta > 1$.

Exercice 4.25 (★★)

Déterminer un équivalent simple de
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

Fonction Gamma

Exercice 4.26 (★★ - Valeur de Γ aux demi-entiers)

1. Justifier la convergence et déterminer la valeur de intégrales $\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} t^{\frac{5}{2}}e^{-t}\mathrm{d}t$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

Exercice 4.27 (★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Déterminer I_0 et I_1.
3. À l'aide du changement de variable $y = x^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{2}I_n$.
5. Exprimer I_{2n+1} et I_{2n} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
6. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} P(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur en fonction des cœfficients de P.

Exercice 4.28 (★★★ - Oral ESCP 2012 - Fonction bêta d'Euler)

Pour tous réels strictement positifs x et y, on pose $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Prouver la convergence de l'intégrale définissant $B(x,y)$.
2. (a) Prouver que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $B(x,y) = B(y,x)$.
   (b) Montrer que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $B(x+1,y) = \frac{x}{y}B(x,y+1)$.
3. Montrer que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $B(x,y+1) = B(x,y) - B(x+1,y)$.
   En déduire que $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$.
4. Soit n un entier naturel non nul, et soit $x > 0$.
   (a) Étudier le signe sur $[0,1]$ de la fonction $g : t \mapsto e^{-t} - 1 + t$. En déduire que pour tout $t \in [0,n]$, on a :
   $$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$
   (b) Montrer que pour tout $t \in [0,n]$, on a : $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x)$.
5. Montrer que :
   $$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Exercice 4.29 (★★★★ - Étude de la fonction Gamma)

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) \geq \frac{1}{e}\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
   En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Gamma(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x > 1$, $\Gamma(x) \geq 2^{x-1}\displaystyle\int_2^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x)$.
3. On définit pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ la fonction $f_t : x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.
   (a) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.
   Montrer que la fonction f_t est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f_t' et f_t''.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leq \min(x/2, 1)$.
   Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:
   $$\left|\frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right| \leq \frac{|h|}{2}M_2(t,x)$$
   où
   $$M_2(t,x) = \begin{cases} (\ln t)^2 e^{-t}t^{x/2-1} & \text{si } t < 1 \\ (\ln t)^2 e^{-t}t^x & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$
   (c) Justifier la convergence des intégrales :
   $$\int_0^{+\infty} (\ln t)e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t \ , \ \int_0^1 (\ln t)^2 e^{-t}t^{x/2-1}\,\mathrm{d}t \ \text{ et } \ \int_1^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t}t^x\,\mathrm{d}t.$$

(d) En déduire que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} f_t'(x)\,\mathrm{d}t.$$

(e) À l'aide du théorème de Rolle, montrer qu'il existe un réel $\alpha \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$.
On ne cherchera pas à déterminer α.

4. (a) Soit $t > 0$, montrer que la fonction f_t est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) En déduire que la fonction Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Dresser le tableau de variation de la fonction Γ et tracer sa courbe représentative.

Problème

Exercice 4.30 (*Valeur de l'intégrale de Gauss*)

1. *Les intégrales de Wallis*

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$.

   (a) Calculer I_0 et I_1.
   (b) Trouver une relation reliant I_{n+2} et I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Calculer $(n+1)I_{n+1}I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (e) Montrer que $I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} I_n$.
   (f) Déduire des questions précédentes un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   Les deux questions suivantes ne servent pas à déterminer la valeur de l'intégrale de Gauss mais sont classiques sur les intégrales de Wallis.
   (g) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer la valeur de I_{2k} et I_{2k+1} en fonction de k.
   (h) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$.

2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$, $K_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x$ et $L_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$.
   Après avoir justifié l'existence de ces intégrales, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n \leq K_n \leq L_n$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Effectuer les changements de variable suivants :
   $x = \cos t$ dans J_n, $t = \sqrt{n}x$ dans K_n et $x = \dfrac{1}{\tan t}$ dans L_n.
   (d) Déduire des questions 1.(f) et 2.(c), la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.
