TD4b

Variables à densité

Loi d'une variable aléatoire à densité

4.1 En partant d'une densité

Exercice 4.1 (★)
Soit a un réel. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} ax(x-1)(x-2) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer l'unique réel a pour que la fonction f soit une densité de probabilité.
2. Dorénavant a prend la valeur de la question précédente.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X admettant f pour densité.
   (b) Calculer $\mathbb{P}\left(X > \frac{3}{4}\right)$ et $\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{3}{4}\right)$.
   (c) Montrer que X admet une espérance et la déterminer.

Exercice 4.2 (★)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

1. Démontrer que la fonction f est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X admettant f pour densité.
3. Calculer $\mathbb{P}(X > 3)$ et $\mathbb{P}(2 < X \leqslant 10)$.
4. Montrer que X admet une espérance et la déterminer.

Exercice 4.3 (★★)
Soit f la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < 0$ et $f(t) = te^{-t}$ sinon.

1. Montrer que f est une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f.
2. Montrer que X possède une espérance et la calculer.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire réelle discrète $\lfloor X \rfloor$.
4. Déterminer la fonction de répartition de la variable $D = X - \lfloor X \rfloor$. En déduire que D est une variable aléatoire à densité, et en donner une densité.

Exercice 4.4 (★★)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ayant f pour densité.
3. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

   (a) Etudier les variations de g. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans J un intervalle à déterminer puis déterminer sa bijection réciproque.

   (b) On définit une variable aléatoire Y par :

$$Y = g(X) = \frac{e^X - 1}{e^X + 1}$$

   Déterminer la fonction de répartition et une densité de Y.

Exercice 4.5 (★★)

Soit α un réel et f une fonction, définie par $f(x) = \alpha(1+\cos x)\mathrm{e}^{-|x|}$.

1. Comment choisir α pour que f soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire X ?
2. Déterminer dans ce cas l'espérance et la variance de X.

Exercice 4.6 (★★ - D'après Ecricome 2015)

1. Déterminer un réel a tel que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{a}{x\ln^2(x)} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ soit une densité.

   Dans toute la suite, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X.
3. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
4. Calculer les probabilités $P(0 \leq X \leq 4)$ et $P(X \geq 5/2)$.

4.2 En partant d'une fonction de répartition.

Exercice 4.7 (★)

On considère la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \frac{1}{2}e^{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que F est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
2. Un joueur joue a un jeu d'argent. On considère la variable aléatoire X égale à son gain. On suppose que la fonction de répartition de X est F.

(a) Quelle est la probabilité que le joueur gagne plus de deux euros? Entre deux et trois euros?

(b) On sait que le joueur n'a pas perdu d'argent, quelle ait la probabilité qu'il ait gagné plus de deux euros?

3. Montrer que l'on peut prendre la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

comme fonction densité pour X.

4. (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ converge et déterminer sa valeur.

(b) Sans calculs, montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 4.8 (★★★★ - QSP HEC 2008)

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Montrer que la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = F(x+1) - F(x)$$

est une densité de probabilité.

Lois à densité usuelles

Exercice 4.9 (★★ - ✍)

Calculer les espérances et variances de toutes les lois à densité usuelles.

On pourra pour la loi normale commencer par une variable suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$, puis passer au cas général à l'aide d'une transformation affine.

Exercice 4.10 (★★ - Utilisation de la table de la loi normale)

1. On suppose que X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
   À l'aide de la table de valeurs de Φ, déterminer une valeur approchée des probabilités suivantes :

$$P(X \leq 0,23)\ ,\ P(X \geq 0,82)\ ,\ P(-3 \leq X \leq 1)\ ,\ P(X^2 > 0,82^2).$$

2. Reprendre la question précédente en supposant cette fois que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(-1,4)$.

3. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer $x \in \mathbb{R}$ pour que :

$$P(X \leq x) = 0,95\ ;\ P(X \geq x) = 0,10\ ;\ P(|X| \leq x) = 0,90\ ;\ P(5+3X > x) = 0,01.$$

4. On suppose maintenant que X suit une loi normale.
   Déterminer l'espérance et la variance de X sachant $P(X < -1) = 0,05$ et $P(X > 3) = 0,12$.

Exercice 4.11 (★★ - Calcul d'intégrales gaussiennes à l'aide de lois normales)

En utilisant des lois normales bien choisies, calculer les valeurs des intégrales suivantes :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t^2-8t)}\,\mathrm{d}t, \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2-4t-8}\,\mathrm{d}t, \quad K = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2-4t-8}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4.12 (★★)
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui suit une loi normale centrée réduite. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace, indépendante de X et telle que $P(Y = 1) = p$ et $P(Y = -1) = 1 - p$. Montrer que $Z = XY$ a la même loi que X.

Exercice 4.13 (★★★ - Caractérisation de la loi exponentielle par l'absence de mémoire - ✍)
On dit qu'une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est *sans mémoire* si elle vérifie, pour tous $s, t > 0$:

$$P(T > t + s) = P(T > t)P(T > s).$$

1. Vérifier qu'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est une variable aléatoire sans mémoire.
2. Réciproquement, soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ sans mémoire et vérifiant $P(T > 0) > 0$.
   (a) On suppose qu'il existe $t > 0$ tel que $P(T > t) = 0$. Calculer $P(T > \frac{t}{2^n})$ en fonction de $P(T > t)$. En déduire que $P(T > 0) = 0$. Conclusion ?
   (b) Soit $\alpha = P(T > 1)$. On souhaite démontrer que $P(T > t) = \alpha^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
      i. Démontrer ce résultat si $t \in \mathbb{N}^*$.
      ii. On suppose $t \in \mathbb{Q}_+^*$ et on note $t = \frac{p}{q}$. Démontrer que $P(T > p) = (P(T > p/q))^q$. En déduire que le résultat est vrai pour $t \in \mathbb{Q}_+^*$.
      iii. En utilisant la décroissance de $x \mapsto P(T > x)$, démontrer que le résultat est vrai pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
   (c) Conclure.
3. Justifier le terme « sans mémoire ». On pourra calculer $P_{[T>s]}(T > s + t)$.

Exercice 4.14 (★★★ - QSP ESCP 2006)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$, de densité f. On définit une fonction G sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq xt) f(t)\, \mathrm{d}t.$$

1. Déterminer la fonction G.
2. Montrer que G est la fonction de répartition d'une variable à densité Y, et donner une densité g de Y.

Fonction d'une variable aléatoire à densité

Exercice 4.15 (★★)
Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X.
2. Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X.
3. Montrer que X n'admet pas d'espérance. X admet-elle une variance ?
4. (a) On pose $Y = -3X + 2$. Justifier que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y. Y admet-elle une espérance ?

(b) On pose $Z = 1 + \sqrt{X}$. Montrer que Z est une variable à densité et déterminer une densité de Z. Montrer que Z admet une espérance et la déterminer. Z admet-elle une variance ?

Exercice 4.16 (★★)
Pour tout réel t, on pose $f(t) = e^{-2|t|}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f, et $Y = X^2$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité.

Exercice 4.17 (★★)
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

1. Donner la loi de $Y = |X|$. Préciser son espérance et sa variance.
2. Déterminer la fonction de répartition de $Z = \frac{X+|X|}{2}$. La variable Z est-elle à densité ?

Exercice 4.18 (★★★ - QSP HEC 2010)
On dit qu'une variable X suit la loi de Cauchy si elle admet pour densité la fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}$.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Cauchy. Montrer que $\frac{1}{X}$ suit la loi de Cauchy.

Exercice 4.19 (★★★)
Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

1. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < m$. On pose $X = n + \lfloor (m - n + 1)U \rfloor$. Montrer que $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket n, m \rrbracket)$.
2. Soit $\lambda > 0$. On pose $Y = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 - U)$. Déterminer la loi de Y.
3. On pose $Z = \lfloor Y \rfloor + 1$. Montrer que Y suit une loi usuelle que l'on précisera.
4. On rappelle que la fonction `rd.random()` (de la bibliothèque `numpy.random`) renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathscr{U}([0, 1])$. Écrire des fonctions `uniforme(n,m)`, `exponentielle(lambda)` et `geometrique(p)` simulant respectivement une loi $\mathscr{U}(\llbracket n, m \rrbracket)$, une loi $\mathscr{E}(\lambda)$ et une loi $\mathscr{G}(p)$ à partir de la fonction `rd.random()`.

Exercice 4.20 (★★★★ - QSP HEC 2013)
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $]-1, 1[$.

1. Trouver toutes les fonctions ϕ définies, continues et strictement monotones sur $]-1, 1[$ telles que la variable aléatoire $Y = \phi(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.
2. En déduire une fonction paire ψ définie sur $]-1, 1[$, telle que la variable aléatoire $\psi(X)$ suive aussi la loi exponentielle de paramètre 1.

Moments d'une variable à densité

Exercice 4.21 (★)

1. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}(]0,1[)$. Justifier l'existence de $E(\ln(X))$ et la calculer.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$. On note Φ la fonction de répartition de X. Justifier l'existence de $E(\Phi(X))$ et la calculer.

Exercice 4.22 (★)

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} -\ln(x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que X admet des moments de tout ordre et les calculer.

Exercice 4.23 (★★)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi γ de paramètre ν.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X admet un moment d'ordre n, et calculer ce moment.
2. On pose $Y = e^X$. Montrer que Y est une variable à densité, et donner une de ses densités.
3. Montrer que Y n'admet pas d'espérance.

Exercice 4.24 (★★)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

1. Déterminer la loi de $-X$ puis de $\pi(X+1)$.
2. On pose $Y = \frac{X^2}{2}$.
   (a) Montrer que Y admet une espérance et une variance et les déterminer.
   (b) Montrer que Y suit une loi usuelle que l'on précisera. Retrouver alors son espérance et sa variance.

Exercice 4.25 (★★ - Loi de Pareto et loi exponentielle)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(a)$, $a > 0$. On pose alors $Y = e^X$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y. En déduire que Y est une variable à densité et en donner une densité.
2. À quelle condition sur a la variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? Calculer alors $E(Y)$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Y admette une variance, et lorsque cette condition est vérifiée, calculer $V(Y)$.

Exercice 4.26 (★★★ - QSP ESCP 2022 - ✍)

Soit X une variable aléatoire positive, qui admet une espérance, de densité f définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(X > t)\,\mathrm{d}t$.
